

# Maths pour la physique

Pôle Physique

# Contents

<b>1 Algèbre générale</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction Générale . . . . .	2
1.2 Sommes . . . . .	2
1.3 Limites Classiques . . . . .	4
1.4 Nombres complexes . . . . .	5
1.5 Exemples et Applications . . . . .	6
<b>2 Analyse et calcul différentiel-Partie 1</b>	<b>7</b>
2.1 Fonctions usuelles : . . . . .	7
2.2 Fonction réciproque : . . . . .	15
2.3 Dérivée d'une fonction numérique à une seule variable : . . . . .	18
2.4 Dérivée d'une fonction de plusieurs variables : . . . . .	23
<b>3 Analyse et calcul différentiel- Partie 2</b>	<b>30</b>
3.1 Courbes Paramétrées . . . . .	30
3.2 Surfaces et Volumes . . . . .	35
3.3 Champs scalaires et vectoriels . . . . .	45
3.4 Théorèmes d'intégration du calcul vectoriel . . . . .	56
3.5 Développement limité . . . . .	57
<b>4 Calcul intégral Géométrie</b>	<b>64</b>
4.1 Calcul Intégral . . . . .	64
4.2 Géométrie . . . . .	71
<b>5 Equations différentielles</b>	<b>87</b>
5.1 Introduction aux Équations Différentielles . . . . .	87
5.2 Équations linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants . . . . .	88
5.3 Système différentiel . . . . .	90
5.4 Exponentielle de matrice . . . . .	91
5.5 Résolution d'un système différentiel . . . . .	92
5.6 Exercices . . . . .	93
<b>6 Probabilités</b>	<b>95</b>
6.1 Espace probabilisé . . . . .	95
6.2 Probabilité conditionnelle . . . . .	97
6.3 Variables aléatoires . . . . .	99
6.4 Espérance et variance de V.A . . . . .	100
6.5 Lois usuelles . . . . .	101
6.6 Applications . . . . .	104

# 1 Algèbre générale

## 1.1 Introduction Générale

Dans ce document, nous allons étudier de façon **approfondie** plusieurs notions fondamentales pour les mathématiques et la physique :

- **Les sommes** : sommes arithmétiques et géométriques, sommes doubles, sommes télescopiques, sommes de Riemann, etc.
- **Les limites classiques** : un catalogue des limites que tout élève doit connaître (fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmiques, polynomiales, etc.) Nous introduirons aussi le **théorème de l'Hôpital** pour certaines formes indéterminées (nécessite la dérivation).
- **Les nombres complexes** : définition, module, argument, et formes polaire/exponentielle (utile en physique, électronique, etc.).

**Note 1.1.** *Si vous n'avez pas encore vu la **dérivation**, et notamment la notion de dérivée, il est recommandé de consulter un cours d'introduction au calcul différentiel avant d'aborder l'application du théorème de l'Hôpital.*

## 1.2 Sommes

**Définition 1.1** (Notion de somme). *Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite. La somme des  $n + 1$  premiers termes est:*

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

### Sommes doubles

**Définition 1.2** (Somme double). *Une somme double est une somme sur deux indices (ex.  $i, j$ ), par exemple:*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}.$$

**Théorème 1.1** (Échange d'ordre de sommation). *Si tout est fini, on peut échanger l'ordre de sommation:*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{i,j}.$$

## Opérations sur les sommes

**Théorème 1.2** (Linéarité de la somme). *Pour deux suites  $(u_k)$  et  $(v_k)$ , et pour tout réel  $\alpha$ :*

$$\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k, \quad \sum_{k=0}^n \alpha u_k = \alpha \sum_{k=0}^n u_k.$$

## Sommes arithmétiques

**Définition 1.3** (Suite arithmétique). *Une suite  $(u_n)$  est dite arithmétique s'il existe  $r$  tel que : pour tout  $n$*

$$u_{n+1} = u_n + r,$$

*où  $r$  est dite la **raison**.*

**Théorème 1.3** (Terme général d'une suite arithmétique).

$$u_n = u_0 + n r,$$

*où  $r$  est la **raison**.*

**Théorème 1.4** (Somme d'une suite arithmétique).

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

## Sommes géométriques

**Définition 1.4** (Suite géométrique). *Une suite  $(u_n)$  est dite géométrique s'il existe  $q$  tel que : pour tout  $n$*

$$u_{n+1} = q u_n,$$

*où  $q$  est dite la **raison**.*

**Théorème 1.5** (Terme général d'une suite géométrique).

$$v_n = v_0 q^n,$$

*où  $q$  (réel ou complexe) est la **raison**.*

**Théorème 1.6** (Somme d'une suite géométrique). Pour  $q \neq 1$ ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_0 q^k = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

**Note 1.2.** La série  $\sum_{k=0}^{\infty} v_0 q^k$  converge si et seulement si  $|q| < 1$ , et sa limite vaut alors  $\frac{v_0}{1-q}$ .

### Sommes télescopiques

**Définition 1.5** (Somme télescopique). Une somme dont la plupart des termes s'annulent deux à deux. Exemple :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

### Sommes de Riemann (aperçu)

**Définition 1.6** (Somme de Riemann). Pour approximer  $\int_a^b f(x) dx$ , on divise  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles égaux de pas  $\Delta x$ , et on définit

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x,$$

avec  $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ . Quand  $n \rightarrow \infty$ , cette somme tend vers l'intégrale (si  $f$  est suffisamment régulière).

## 1.3 Limites Classiques

### Définitions formelles

**Définition 1.7** (Limite d'une fonction).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Définition 1.8** (Limite d'une suite).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, |u_n - L| < \varepsilon.$$

## Théorème de l'Hôpital

Pour l'étude de certaines limites de la forme  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (ex:  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ ), on utilise:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

si  $f$  et  $g$  sont dérivables et  $g'(x) \neq 0$  près de  $a$ .

**Attention:** ce théorème requiert la notion de dérivée.

## Catalogue des limites

**Trigonométriques:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , etc.

**Exponentielle/Logarithme:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , etc.

**Polynômes et fractions rationnelles:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \deg(P) < \deg(Q), \\ \frac{a_{\deg(P)}}{a_{\deg(Q)}} & \deg(P) = \deg(Q), \\ \pm\infty & \deg(P) > \deg(Q) \text{ (selon le signe)}. \end{cases}$$

## 1.4 Nombres complexes

**Définition 1.9** (Nombre complexe). Un complexe  $z$  s'écrit  $z = x + iy$ , où  $i^2 = -1$ .

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y.$$

**Théorème 1.7** (Opérations de base). Soient  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$$\bar{z} = x - iy, \quad z \bar{z} = x^2 + y^2.$$

**Définition 1.10** (Forme polaire).  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , où  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z)$ .

**Théorème 1.8** (Forme exponentielle).

$$z = r e^{i\theta}, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

*Interprétation:* on **multiplie** les modules et on **additionne** les arguments.

**Note 1.3.** *En physique, cette écriture permet de modéliser de façon simple les phénomènes oscillants (ondes, signaux AC, etc.).*

## 1.5 Exemples et Applications

### Oscillations amorties

$u_n = Aq^n \sin(n\omega + \phi)$ , etc.

### Sommes de Riemann en physique

Approximations du travail  $W = \int F(x) dx$ , etc.

## 2 Analyse et calcul différentiel-Partie 1

### 2.1 Fonctions usuelles :

Fonctions polynômes :

**Définition 2.1.** Une fonction polynôme de degré  $n$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  s'écrit sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

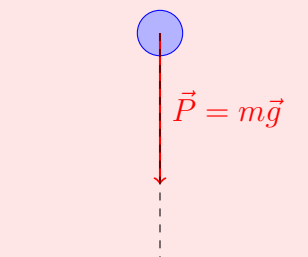
avec  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$  et  $a_n \neq 0$ .

**Théorème 2.1.** si  $P$  est impaire, alors les coefficients d'indice pair sont tous nuls.  
si  $P$  est paire, alors les coefficients d'indice impair sont tous nuls.

#### Exercice 2.1. Mouvement du chute libre

Un corps est en chute libre lorsqu'il n'est soumis qu'à son poids.

Déterminer la hauteur  $h(t)$  en fonction du temps.



**Corrigé :** D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD) :  $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$

Alors :  $\vec{a} = \vec{g}$ , d'où  $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$ .

Cette équation différentielle admet comme solution :  $t \mapsto -\frac{1}{2}gt^2 + ct + b$ , avec  $c, b \in \mathbb{R}$ ,

On suppose qu'à  $t = 0$   $h(0) = b = h_0$  et  $h'(0) = c = 0$ ,

et par conséquent, l'équation du mvt est :  $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$

**Note 2.1.** Les polynômes sont faciles à manipuler et étudier. C'est pour cette raison, qu'en physique, on essaie d'approximer des fonctions qui sont un peu complexes avec des polynômes souvent de premier ou de deuxième degré.

**Exemple 1 :**

- $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$  lorsque  $x \ll 1$  ( $x \ll 1$  signifie  $x$  suffisamment petit ou négligeable devant 1).
- $\sin x \simeq x$  lorsque  $x \ll 1$
- $\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2$  lorsque  $x \ll 1$

## Fonction polynôme de 2<sup>ème</sup> degré :

### Rappel :

Les fonctions polynomiales de degré 2, de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , font l'objet d'une étude bien structurée, reposant sur le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ . En fonction du signe de  $\Delta$ , on distingue les cas suivants :

#### 1. Signe du discriminant :

- Si  $\Delta > 0$ , la courbe représentative de  $f$  coupe l'axe des abscisses en deux points distincts d'abscisse :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si  $\Delta = 0$ , la courbe coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse :

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

- Si  $\Delta < 0$ , la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.
  - Si  $a > 0$ , la parabole est située entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.
  - Si  $a < 0$ , elle est située en dessous.

#### 2. Sens de la parabole :

- Si  $a > 0$ , la parabole est tournée vers le haut : elle atteint un **minimum** au point d'abscisse  $x = \frac{-b}{2a}$ .
- Si  $a < 0$ , la parabole est tournée vers le bas : elle atteint un **maximum** au point d'abscisse  $x = \frac{-b}{2a}$ .

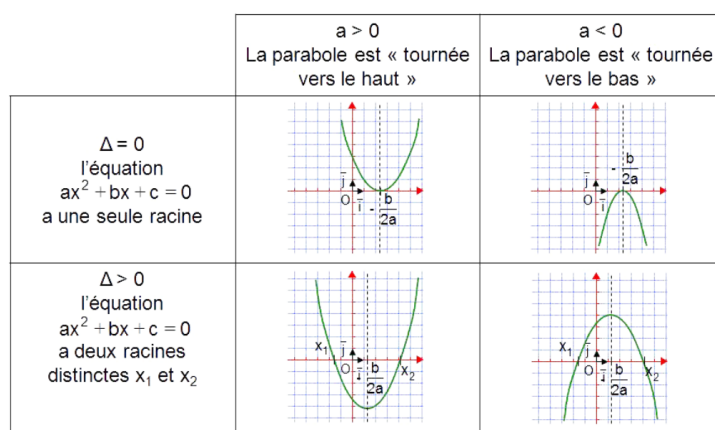


Figure 1: Source : educastream

## Fonction exponentielle :

**Définition 2.2.** La fonction exponentielle  $\exp$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$   $\exp x = e^x$  avec  $e$  un nombre réel irrationnel compris entre 2,71 et 2,72.

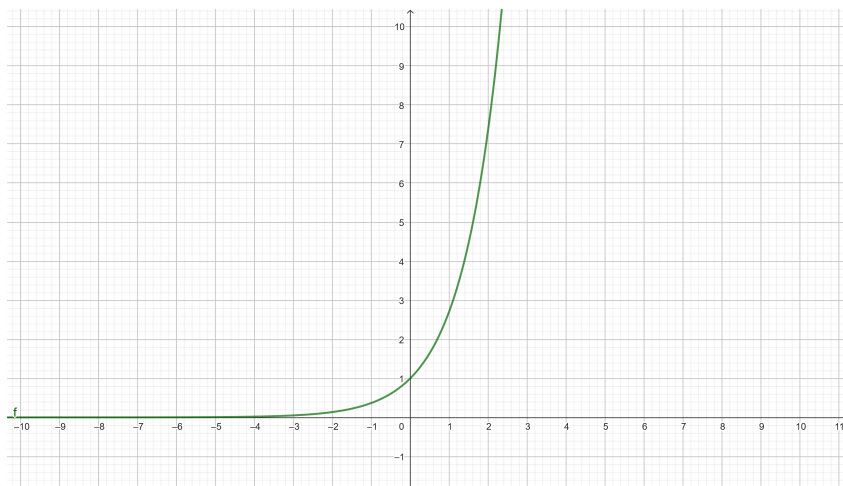


Figure 2: Représentation graphique de la fonction exponentielle.

**Théorème 2.2.**

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad e^{a+b} = e^a e^b$  et  $(e^a)^b = e^{ab}$
- La fonction  $\exp$  est l'une des solutions de l'équation différentielle  $y' = y$ .
- La fonction  $\exp$  est strictement croissante.
- Limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

- Croissance comparée :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^r e^x = 0$$

**Note 2.2.** La fonction exponentielle est omniprésente en physique en raison de sa capacité à décrire des phénomènes naturels impliquant des croissances ou des décroissances continues et proportionnelles à l'état actuel du système.

**Note 2.3.** *Ce qui est à l'intérieur de l'exponentielle est toujours sans dimension.*

**Exemples :**

### Désintégration radioactive

Lorsqu'un matériau radioactif se désintègre, la quantité de noyaux restants suit une loi exponentielle décroissante :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où :

- $N(t)$  : quantité de noyaux restants à l'instant  $t$ .
- $N_0$  : quantité initiale de noyaux.
- $\lambda$  : constante de désintégration.

### Refroidissement de Newton

Le taux de refroidissement d'un objet suit une loi exponentielle si la différence de température avec l'environnement est proportionnelle au taux de changement (Voir le cours de thermodynamique):

$$T(t) = T_{\text{env}} + (T_0 - T_{\text{env}})e^{-kt}$$

où :

- $T(t)$  : température de l'objet à l'instant  $t$ .
- $T_{\text{env}}$  : température ambiante.
- $T_0$  : température initiale.
- $k$  : constante de refroidissement.

### Fonction logarithme :

**Définition 2.3.** *La fonction logarithme népérien  $\ln$  est définie pour  $x > 0$  et constitue la fonction réciproque de la fonction exponentielle.*

**Théorème 2.3.**  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \text{ pour } a, b > 0 ; \quad \ln a^r = r \ln a \text{ pour } r \in \mathbb{R}, a > 0.$$

*Limites usuelles:*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$



Figure 3: Représentation graphique de la fonction logarithme.

*Croissance comparée :*

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$$

**Note 2.4.** *Lorsqu'un phénomène physique suit une loi exponentielle, le logarithme permet de linéariser les données pour faciliter leur interprétation et leur analyse, notamment dans les processus de charge/décharge de condensateurs, la dynamique des populations, la croissance bactérienne, ou la désintégration radioactive.*

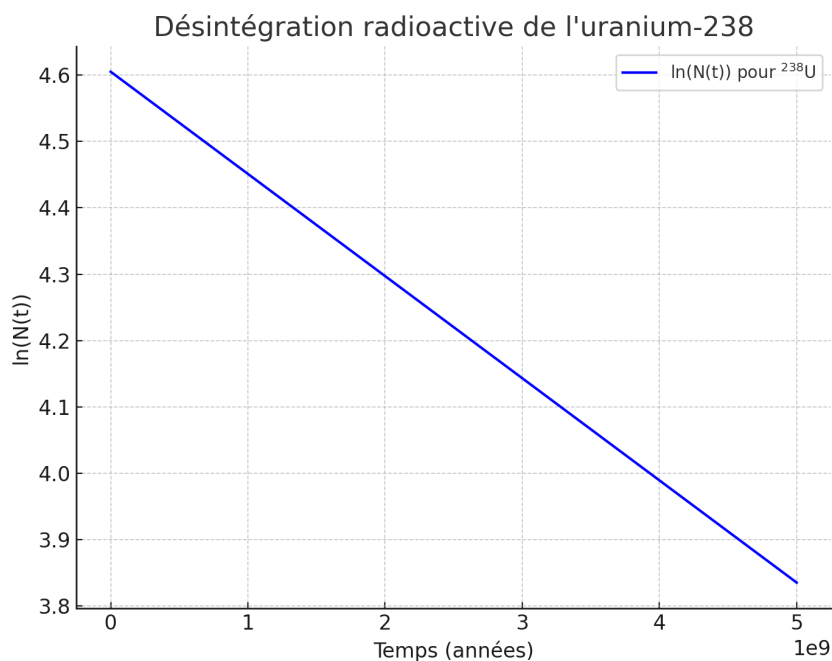
**Exercice 2.2. Désintégration radioactive :** *Le nombre de noyau d'Uranium 238 dans un échantillon radioactive suit la loi exponentielle suivante :*

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où :

- $N(t)$  est le nombre de noyau à l'instant  $t$ ,
- $N_0$  est le nombre de noyau à l'instant  $t = 0$ ,
- $\lambda$  est la constante de désintégration,

*On donne le graphe ci-dessous de  $\ln N(t)$  en fonction de  $t$ , trouver la constante de désintégration de l'Uranium 238.*



**Corrigé :**

On a  $\ln(N(t)) = \ln(N_0 e^{-\lambda t}) = \ln(N_0) + \ln(e^{-\lambda t}) = \ln(N_0) + \ln(e^{-\lambda t}) = \ln(N_0) - \lambda t \ln(e) = \ln(N_0) - \lambda t$ ,

Donc  $\ln(N(t))$  est une fonction affine de pente  $-\lambda$ ,

Donc  $\lambda = -\frac{\ln N(t_1) - \ln N(t_2)}{t_1 - t_2}$ ,

A partir du graphe donné, on a : pour  $t_1 = 0$ ,  $\ln N(t_1) = 4,6$  et pour  $t_2 = 2 \cdot 10^9$  ans,  $\ln N(t_2) = 4,3$

et donc  $\lambda = -\frac{4,6 - 4,3}{0 - 2 \cdot 10^9} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ an}^{-1}$

**Fonctions trigonométriques :**

**Définition 2.4.**  $\sin$  et  $\cos$  définies sur  $\mathbb{R}$ ,  $\tan$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

- $\sin$  est croissante sur  $[(4k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}, (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}]$  et est décroissante sur  $[(4k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, (4k + 3) \cdot \frac{\pi}{2}]$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $\cos$  est décroissante sur  $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ , et est croissante sur  $[(2k + 1)\pi, 2(k + 1)\pi]$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $\tan$  croissante sur ses intervalles de définition.
- $x^2 + y^2 = R^2$  équivaut à  $\exists \theta \in \mathbb{R}; \quad x = R \cos \theta$  et  $y = R \sin \theta$
- Les fonctions  $t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ ,  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$  sont solutions de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

**Identités trigonométriques :**

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin a \pm \sin b = 2 \sin \left( \frac{a \pm b}{2} \right) \cos \left( \frac{a \mp b}{2} \right)$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$
- $\cos a - \cos b = -2 \sin \left( \frac{a+b}{2} \right) \sin \left( \frac{a-b}{2} \right)$

**Note 2.5.** *Les fonctions trigonométriques telles que le sinus, le cosinus et la tangente jouent un rôle crucial en physique. Elles permettent de modéliser des phénomènes périodiques, d'analyser les mouvements, et de résoudre des problèmes géométriques complexes.*

### Mouvement harmonique simple

Le mouvement d'un pendule ou d'un oscillateur harmonique est souvent décrit par des fonctions trigonométriques. Par exemple, la position d'un objet en mouvement harmonique simple peut être exprimée par :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

où  $A$  est l'amplitude,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  la pulsation,  $T$  la période,  $f = \frac{1}{T}$  la fréquence, et  $\phi$  la phase initiale (à  $t = 0$ ).

$$tx(t)$$

### Forces et décompositions vectorielles

Les fonctions trigonométriques sont essentielles pour décomposer les forces dans des systèmes en deux ou trois dimensions. Par exemple :

$$V_x = V \cos \alpha \text{ et } V_y = V \sin \alpha$$

Cela permet de simplifier les calculs dans l'étude de l'équilibre des forces.

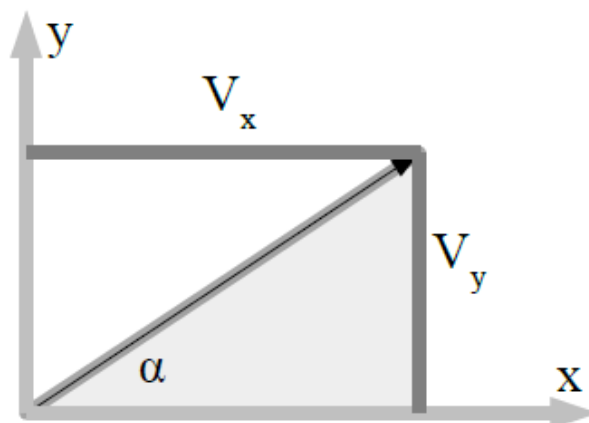


Figure 4

**Exercice 2.3.** Montrer en utilisant les propriétés précédentes que :

$$A \cos \theta + B \sin \theta = C \cos(\theta + \phi)$$

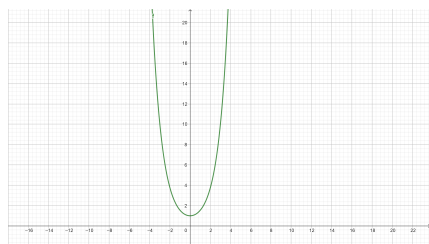
avec :  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  et  $\tan \phi = \frac{B}{A}$

**Fonctions hyperboliques :**

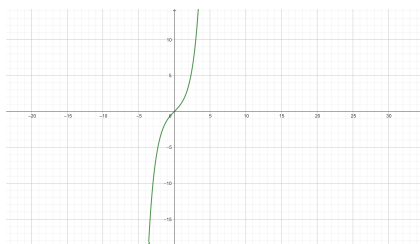
**Définition 2.5.** La fonction cosinus hyperbolique est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

La fonction sinus hyperbolique est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

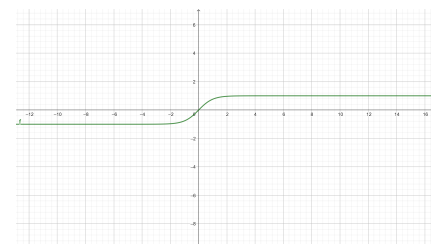
La fonction tangente hyperbolique est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ .



cosh



sinh



tanh

**Théorème 2.4.**

- **Parité :** Les fonctions  $\sinh$  et  $\tanh$  sont impaires.  
La fonction  $\cosh$  est paire.
- $x^2 - y^2 = R^2$  équivaut à  $\exists t \in \mathbb{R} \quad x = R \cosh t$  et  $y = R \sinh t$ .

- Les fonctions  $t \mapsto A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$ ,  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$  sont solutions de l'équation différentielle  $y'' - \omega^2 y = 0$ .

## 2.2 Fonction réciproque :

**Définition 2.6.** Rappel :

- Une fonction  $f : I \rightarrow J$  est dite injective sur  $I$  si elle vérifie la propriété suivante:

$$(\forall (x, y) \in I^2) \quad (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

- Une fonction  $f : I \rightarrow J$  est dite surjective de  $I$  vers  $J$  si elle vérifie la propriété suivante :

$$(\forall y \in J)(\exists x \in I) \quad y = f(x)$$

- Une fonction  $f : I \rightarrow J$  est dite bijective de  $I$  vers  $J$  si elle est à la fois injective et surjective, ie. c'est une fonction qui vérifie la propriété suivante :

$$(\forall y \in J)(\exists! x \in I) \quad y = f(x)$$

- Si  $f$  est bijective de  $I$  vers  $J$ , alors il existe une unique fonction  $f^{-1}$  telle que  $f^{-1} \circ f = Id_I$  et  $f \circ f^{-1} = Id_J$ ,  
c-à-d  $\forall x \in I \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$   
et  $\forall y \in J \quad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ .

**Exemple :**

La fonction  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  est la fonction réciproque de la fonction  $\ln : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Fonction trigonométrique réciproque :**

**La fonction arcsinus :**

**Définition 2.7.** La fonction  $\varphi : \begin{matrix} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & [-1, 1] \\ t & \mapsto & \sin t \end{matrix}$  est bijective.

Et par définition,  $\arcsin = \varphi^{-1}$ .

**Théorème 2.5. Composition avec sinus**

- Pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\sin(\arcsin(x)) = x$ .
- Pour  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\arcsin(\sin(x)) = x$ .

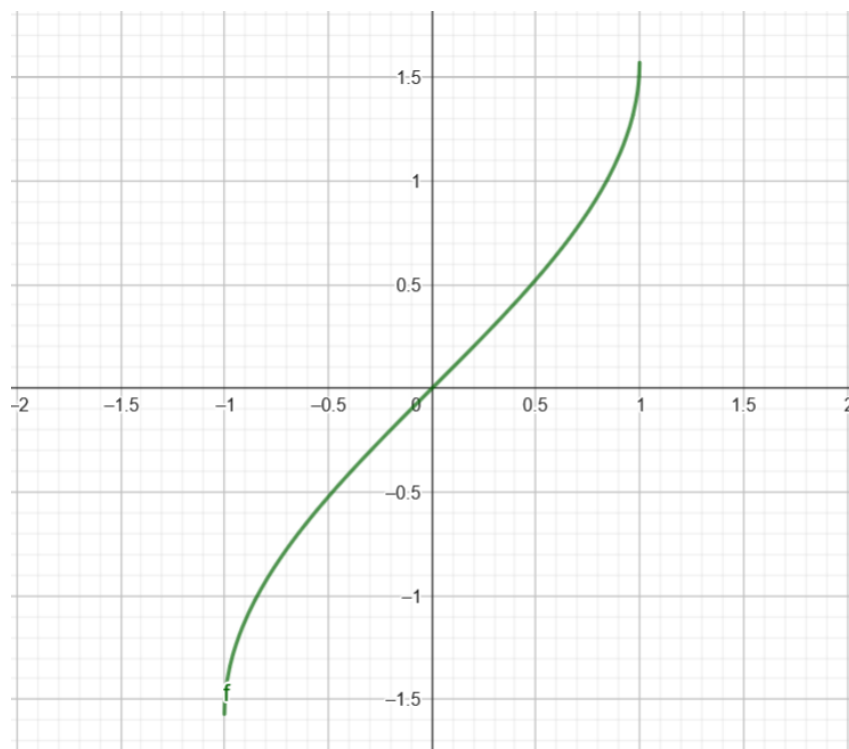


Figure 5: Représentation graphique de arcsin

**Note 2.6.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arcsin(\sin(x))$  a un sens mais n'est pas toujours égal à  $x$  !  
En effet,

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin 0 = 0$$

**Théorème 2.6.** La fonction arcsin est impaire.

**La fonction arccosinus :**

**Définition 2.8.** La fonction  $\varphi : \begin{array}{l} [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \\ t \mapsto \cos t \end{array}$  est bijective.

Et par définition,  $\arccos = \varphi^{-1}$ .

**Théorème 2.7. Composition avec cosinus**

- Pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\cos(\arccos(x)) = x$ .
- Pour  $x \in [0, \pi]$ ,  $\arccos(\cos(x)) = x$ .

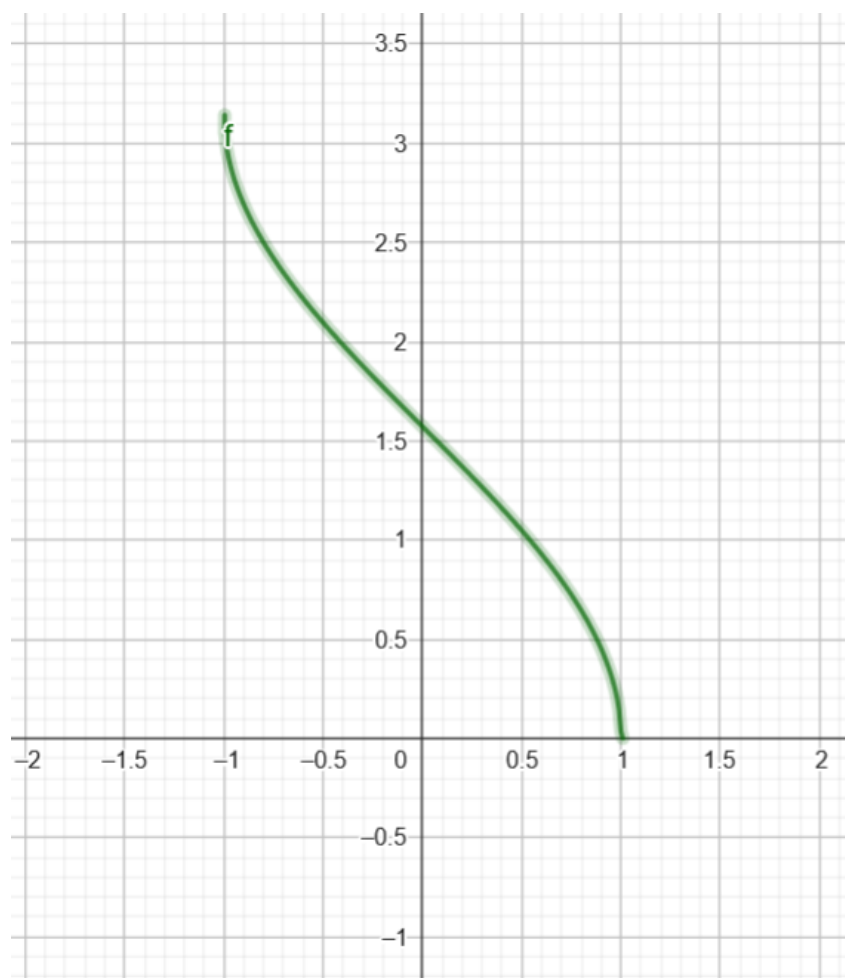


Figure 6: Représentation graphique de arccos

**Note 2.7.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arccos(\cos(x))$  a un sens mais n'est pas toujours égal à  $x$  !  
En effet,

$$\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

**Théorème 2.8.**

$$\forall t \in [-1, 1] \quad \arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$$

**La fonction arctangente :**

**Définition 2.9.** La fonction  $\varphi : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto \tan t$  est bijective.

Et par définition,  $\arctan = \varphi^{-1}$ .

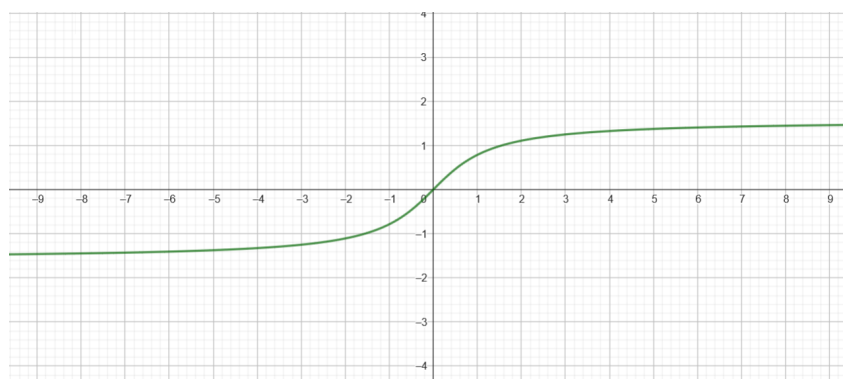


Figure 7: Représentation graphique de arctan

**Théorème 2.9. Composition avec tan**

- Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tan(\arctan(x)) = x$ .
- Pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\arctan(\tan(x)) = x$ .

**Théorème 2.10.**

- La fonction arctan est impaire.
- $\forall t > 0 \quad \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$
- $\forall t < 0 \quad \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2}$
- Limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

**2.3 Dérivée d'une fonction numérique à une seule variable :**

Dans tous ce qui suit  $I$  est un intervalle non vide et non réduit à un point, et  $\mathbb{R}^I$  est l'ensemble des fonctions numériques définies de  $I$  vers  $\mathbb{R}$

**Définition et propriétés de base :**

**Définition 2.10.** Soit  $f \in \mathbb{R}^I$  et  $a \in I$ , On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie (c'est-à-dire un nombre réel). Dans ce cas, on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$$

Le nombre  $l$  est noté  $f'(a)$  ou  $\frac{df}{dx}(a)$  ou encore  $\dot{f}(a)$ .

Il est dit le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ .

**Note 2.8.** En faisant le changement de variable  $h = x - a$ , on trouve que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

**Note 2.9.** Les notations  $\frac{df}{dx}$  et  $\dot{f}$  sont souvent utilisées en physique, la première nous aide à manipuler des différentielles comme si la dérivée était une fraction, ce qui est réellement faux. Par exemple : on écrit pour une variation infiniment petite  $df$  :  
 $df = \frac{df}{dx} dx = f'(x) dx$

### Interprétation géométrique-équation de la tangente :

Soit  $C$  la courbe représentative de  $f \in \mathbb{R}^I$  dans le plan  $C_f$  muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$a \in I$  et  $A(a, f(a)); M(x, f(x)) \in C_f$  différent de  $A(a, f(a))$ .

Dire que  $f$  est dérivable en  $a$  équivaut à dire que le coefficient directeur :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

de la droite  $(AM)$  tend vers une valeur limite  $\ell = f'(a)$ .

Donc que la position de la droite  $(AM)$  tend vers celle de la droite  $(T)$  :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

dite la droite tangente à  $C_f$  au point  $A(a, f(a))$ .

[autoplay,loop,width=10cm]10figures/dérivabilité000/image151

Si  $f$  est dérivable en  $a$  à droite de  $a$ , on parlera de la demi-tangente à droite :

$$\begin{cases} y = f'(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

Si  $f$  est dérivable en  $a$  à gauche de  $a$ , on parlera de la demi-tangente à gauche :

$$\begin{cases} y = f'(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

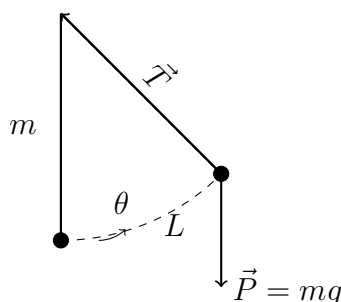
**Note 2.10.** Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f'(a)(x - a) + f(a)$  est une approximation de  $f(x)$  au voisinage de  $a$  dans  $I$ . On utilise souvent ces approximations dans la physique pour simplifier les calculs.

**Exemple 1 :**  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{2}$  et  $f(0) = 1$  alors  $\frac{1}{2}(x - 0) + 1 = 1 + \frac{1}{2}x$  est une approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0, et on écrit  $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}x$ .

$f : x \mapsto \sin x$  est dérivable en 0, et  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$  alors  $1 \times (x - 0) + 0 = x$  est une approximation de  $f$  au voisinage de 0, et on écrit  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

**Exemple 2 : Pendule Pesant** Le pendule simple est un système classique en mécanique qui permet d'illustrer les lois du mouvement oscillatoire. Pour des oscillations de faible amplitude, l'étude par le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) permet de retrouver l'équation du mouvement.

### Schéma du pendule



Lorsque le pendule oscille, il est soumis à deux forces :

- La tension du fil  $\vec{T}$ , dirigée vers le point de suspension.
- Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , dirigé vers le bas.

En décomposant le poids dans le repère tangent-normal, seule la composante tangentielle intervient dans le mouvement :

$$P_t = mg \sin \theta$$

D'après le PFD dans la direction tangentielle :

$$ma = -mg \sin \theta$$

où  $a = L\ddot{\theta}$  est l'accélération tangentielle. (Démonstration dans le cours de cinématique).  $\ddot{\theta}$  veut dire qu'on dérive deux fois  $\theta(t)$ .

$$mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

**Approximation pour les faibles amplitudes** Pour des petites oscillations ( $\theta \ll 1$ ), on peut utiliser l'approximation :

$$\sin \theta \approx \theta$$

L'équation devient alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique simple de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

En appliquant le PFD, nous avons démontré que pour des petites oscillations, le pendule simple suit un mouvement harmonique simple avec une période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

**Opération sur les fonctions dérivables :**

**Théorème 2.11. Dérivée de la composée de deux fonctions** Soient  $f \in \mathbb{R}^I$ ,  $g \in \mathbb{R}^J$  tel que  $f(I) \subset J$  ;  $a \in I$  ;  $b = f(a) \in J$

Si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $g$  est dérivable en  $b$  alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et on a

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$$

**Note 2.11.** On peut voir ce résultat en utilisant l'écriture en fraction de la dérivée:  $(g \circ f)'(a) = \frac{d(g \circ f)}{dx}(a) = \frac{d(g(f))}{df} \cdot \frac{df}{dx}(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$  (Attention, cette écriture n'est pas rigoureuse).

**Théorème 2.12. Dérivée de la fonction réciproque :**

Soit  $a \in I$ , et  $b = f(a)$ , si  $f$  admet une fonction réciproque en  $I$ , et si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $b$  et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Tableau de dérivée des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Domaine de dérivabilité	Dérivée $f'(x)$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$
$x^{-n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-nx^{-n-1}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$] -1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$

Table 1: Tableau des fonctions usuelles et de leur dérivée

## 2.4 Dérivée d'une fonction de plusieurs variables :

Dans tous ce qui suit  $U$  est un ensemble non vide et non réduit à un point.

### Rappel : Produit scalaire

**Définition 2.11.** Soient  $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$  deux vecteurs de l'espace, le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , est égal au réel  $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ .

**Définition 2.12.** Soient  $\vec{u} = (x_1, x_2)$  et  $\vec{v} = (y_1, y_2)$  deux vecteurs du plan, le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , est égal au réel  $x_1y_1 + x_2y_2$ .

### Définition :

**Définition 2.13.** Soit  $f$  une fonction de plusieurs variables définie de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^p$ .

- Si  $p = 1$ , et  $n = 2$  ou  $3$ , et lorsque les variables représentent des coordonnées de l'espace,  $f$  est dite champ scalaire.
- Si  $p = 2$  ou  $3$ , et  $n = 2, 3$ , et lorsque les variables représentent des coordonnées de l'espace, la fonction  $f$  est dite champ vectoriel. En effet,  $f$  associe à chaque point de l'espace un vecteur.

### Exemples :

- La fonction  $T(x, y, z)$  qui donne la température dans un endroit de l'espace.
- L'énergie interne d'un système thermodynamique  $U(P, V, T)$  qui dépend généralement de la pression cinétique  $P$ , le volume qui définit le système  $V$ , et la température cinétique  $T$ .

### Dérivée partielle :

**Définition 2.14.** Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $(x_1, x_2) \in U$ .

On dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable au point  $(x_1, x_2)$  si la fonction  $x \mapsto f(x, x_2)$  est dérivable en  $x_1$ , c-a-d :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} = l \in \mathbb{R}$$

Le cas échéant on pose  $l = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2)$ .

on dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable au point

$(x_1, x_2)$  si la fonction  $y \mapsto f(x_1, y)$  est dérivable en  $x_2$ , c-a-d :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h} = l' \in \mathbb{R}$$

Le cas échéant on pose  $l' = \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2)$ .

**Exercice 2.4.** Calculer les dérivées partielles premières de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = x^2 e^{3y}.$$

**Solution :**

Pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , qui est la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$ , on considère que  $y$  est une constante et on dérive  $x^2 e^{3y}$  comme si c'était une fonction de  $x$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^{3y}.$$

Pour l'autre dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , on considère que  $x$  est une constante et on dérive  $x^2 e^{3y}$  comme si c'était une fonction de  $y$  :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 e^{3y}.$$

**Définition 2.15.** Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $(x_1, x_2, x_3) \in U$ , on dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable au point  $(x_1, x_2, x_3)$  si la fonction  $x \mapsto f(x, x_2, x_3)$  est dérivable en  $x_1$ , c-a-d :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = l \in \mathbb{R}$$

Le cas échéant on pose  $l = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2, x_3)$ .

On dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable au point  $(x_1, x_2, x_3)$  si la fonction  $y \mapsto f(x_1, y, x_3)$  est dérivable en  $x_2$ , c.-à-d. :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = l' \in \mathbb{R}$$

Le cas échéant on pose  $l' = \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2, x_3)$ . on dit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la troisième variable au point  $(x_1, x_2, x_3)$  si la fonction  $z \mapsto f(x_1, x_2, z)$  est dérivable en  $x_3$ , c-a-d :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3 + h) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = l'' \in \mathbb{R}$$

Le cas échéant on pose  $l'' = \frac{\partial f}{\partial z}(x_1, x_2, x_3)$ .

**Différentielle :**

**Gradient :**

**Définition 2.16.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $M(x_1, x_2)$ , si  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première et la deuxième variable au point  $M$ , alors le gradient de  $f$  est défini par :

$$\nabla f = \vec{\text{grad}}(f)(M(x_1, x_2)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2) \right).$$

**Définition 2.17.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $M(x_1, x_2, x_3)$ , si  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première et la deuxième et la troisième variable au point  $M$ , alors le gradient de  $f$  est défini par :

$$\nabla f = \vec{\text{grad}}(f)(M(x_1, x_2, x_3)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f}{\partial z}(x_1, x_2, x_3) \right)$$

**Exercice 2.5.** Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y^2).$$

1. Déterminer le domaine de définition  $U$  de  $f$ .
2. Calculer les dérivées partielles de  $f$ .
3. Calculer le gradient de  $f$  en  $(0, 1)$ .

**Solution**

1. On a  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x + y^2 > 0\}$ .
2. Les dérivées partielles sont :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x+y^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1+x+y^2}$
3. Le gradient s'obtient directement à partir des dérivées partielles :  
 $\nabla f(0, 1) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \right) = \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$

**Différentielle et approximation affine :**

**Définition 2.18.** soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $M(x_0, y_0)$  si  $f$  vérifie certaines conditions, que l'on suppose, en physique, être presque toujours satisfaites, alors :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{\approx} f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k)$$

Avec ;

$$df(x_0, y_0)(h, k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

**Note 2.12.** Soit  $\vec{u} = (h, k)$

$$df(x_0, y_0)(h, k) = \vec{\text{grad}}(f) \cdot \vec{u}$$

**Définition 2.19.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $M(x_0, y_0, z_0)$  si  $f$  vérifie certaines conditions, que l'on suppose, en physique, être presque toujours satisfaites, alors :

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + t) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{\approx} f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0)(h, k, t)$$

Avec :

$$df(x_0, y_0, z_0)(h, k, t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + t \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

**Note 2.13.** Soit  $\vec{u} = (h, k, t)$

$$df(x_0, y_0, z_0)(h, k, t) = \vec{\text{grad}}(f) \cdot \vec{u}$$

**Note 2.14.** Les différentielles sont omniprésentes en physique, car elles permettent de modéliser des variations infinitésimales et d'exprimer des lois fondamentales sous forme différentielle.

### **Théorème 2.13. Théorème de schwartz**

Soit  $f$  une fonction qui représente une grandeur physique et qui possède des dérivées secondes continues. Alors, les dérivées croisées de  $f$  sont égales :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Cette propriété est valable pour de nombreuses quantités en physique, comme la température, le potentiel électrique ou la pression, à condition que  $f$  soit suffisamment régulière.

### **Exemple 1:**

- $T(x + dx, y + dy, z + dz) - T(x, y, z) = dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz = \vec{\text{grad}}(T) \cdot d\vec{OM}$ ,  
avec  $d\vec{OM} = (dx, dy, dz)$

**Exemple 2 :**

**Note 2.15.** *Cet exemple est à considérer lors d'une deuxième lecture de ce cours après avoir vu le cours de thermodynamique en physique.*

- Le premier principe de la thermodynamique énonce que pour un système fermé (pas d'échange de matière avec l'extérieur), on a :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

où :

- $dU$  : variation de l'énergie interne entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .
- $\delta Q$  : chaleur échangée.
- $\delta W$  : travail échangé.

- Si on varie l'entropie (une grandeur physique) avec un  $dS$  et le volume avec un  $dV$  : alors la variation de l'énergie interne du système est :

$$dU = TdS - pdV$$

où :

- $T$  : Température en  $K$ .
- $p$  : Pression en  $Pa$ .

D'après 2.13 :

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

En utilisant les dérivées premières :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T, \quad \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -p$$

Nous obtenons alors :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_V$$

**Relations de Maxwell en thermodynamique :**

Les relations de Maxwell sont des identités thermodynamiques issues des propriétés des dérivées croisées des potentiels thermodynamiques. Elles s'expriment comme suit :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_V$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_p$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Ces relations sont dérivées à partir des potentiels thermodynamiques comme l'énergie libre de Helmholtz  $F$ , l'enthalpie  $H$ , l'énergie libre de Gibbs  $G$  et l'énergie interne  $U$ .

### Différentielle totale exacte et fonction d'état :

**Définition 2.20.** Une fonction d'état est une fonction de grandeurs appelées variables d'état, qui définissent l'état d'équilibre d'un système thermodynamique. Les variables d'état sont par exemple la température  $T$ , la pression  $P$ , le volume  $V$  ou le nombre de moles  $n_i$ .

### Exemple :

L'énergie interne  $U$  est une fonction d'état, elle dépend de  $T$ ,  $P$ ,  $V$  et  $n$  (quantité des particules formant le système thermodynamique).

**Théorème 2.14.** Les fonctions d'état ne dépendent pas du chemin suivi, elles ne dépendent que de l'état du système à l'état d'équilibre, c-à-d la variation de la fonction d'état est égale à la différence entre l'état final et l'état initial.

### Différentielle et lien avec le calcul d'incertitude

En physique expérimentale, le calcul d'incertitude est essentiel pour évaluer la précision des mesures. La différentielle joue un rôle clé dans l'approximation des incertitudes sur une fonction  $f(x, y, \dots)$  en fonction des incertitudes des variables mesurées.

### Approximation des variations avec la différentielle

Si une quantité  $f(x, y)$  dépend de plusieurs variables  $x$  et  $y$ , sa variation infinitésimale est donnée par la **différentielle totale** :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

où  $dx$  et  $dy$  représentent les variations infinitésimales des variables  $x$  et  $y$ .

### Application au calcul d'incertitude

Dans le contexte des mesures,  $dx$  et  $dy$  sont les incertitudes associées aux variables  $x$  et  $y$ , notées respectivement  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . L'incertitude sur  $f$ , notée  $\Delta f$ , peut être approximée par :

$$\Delta f \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y$$

Ceci donne une **borne supérieure** pour l'incertitude.

**Propagation des incertitudes (cas des erreurs indépendantes)**

Si les incertitudes  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont indépendantes, alors on utilise une propagation quadratique des erreurs :

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2}$$

Ce qui permet d'obtenir une estimation plus réaliste de l'incertitude.

**Exemples d'application****Incertitude sur la surface d'un disque**

La surface d'un disque est donnée par :

$$A = \pi r^2$$

L'incertitude sur  $A$ , en fonction de l'incertitude  $\Delta r$  sur le rayon, est :

$$\Delta A \approx \left| \frac{dA}{dr} \right| \Delta r = |2\pi r| \Delta r$$

ou, si l'erreur est indépendante :

$$\Delta A = |2\pi r \Delta r|.$$

**Incertitude sur la résistance électrique en série**

Pour deux résistances en série :

$$R = R_1 + R_2$$

L'incertitude totale est la somme des incertitudes :

$$\Delta R = \sqrt{\Delta R_1^2 + \Delta R_2^2}$$

**Incertitude sur une loi non linéaire (loi d'Ohm)**

Si  $V = RI$ , alors l'incertitude sur  $V$  est donnée par :

$$\Delta V = \sqrt{(I\Delta R)^2 + (R\Delta I)^2}.$$

## 3 Analyse et calcul différentiel- Partie 2

Cette deuxième partie du cours sera consacrée à des concepts plus avancés du calcul différentiel et intégral, appliqués principalement aux dimensions  $n = 2$  et  $n = 3$ <sup>1</sup>. Nous y développerons des outils géométriques et analytiques indispensables à la compréhension des phénomènes physiques.

Nous commencerons par explorer la **géométrie de l'espace**, à travers l'étude des **courbes paramétrées**, des **surfaces** et des **volumes**. Ces objets serviront de support pour introduire des notions fondamentales comme les tangentes, les normales ou encore la mesure de la longueur, de l'aire et du volume via l'intégration.

Nous introduirons ensuite les **champs scalaires** et les **champs vectoriels**, qui permettent de modéliser des quantités physiques réparties dans l'espace, comme la température, la pression ou encore les champs électriques et magnétiques. Cela nous amènera à définir et étudier les **opérateurs différentiels** qui agissent sur ces champs : le **gradient**, la **divergence** et le **rotationnel**.

Sur cette base, nous aborderons les **grands théorèmes du calcul intégral vectoriel**, qui relient des intégrales de différentes dimensions et jouent un rôle central en physique, notamment, le **théorème de Green** (en dimension 2), le **théorème de Stokes** (en dimension 3) et le **théorème de Gauss** (ou théorème de la divergence). Ces résultats sont essentiels pour comprendre les lois locales et globales de l'électromagnétisme, de la mécanique des fluides ou de la gravitation.

Enfin, nous introduirons la notion du **développement limité** (ou développements de Taylor) pour les fonctions de plusieurs variables, afin de fournir des outils d'approximation utiles en physique théorique et appliquée.

### Note 3.1. Exigences

- *Analyse et Calcul Différentiel - partie 1 (Tout)*
- *Calcul Intégral et Géométrie (Tout)*
- *Calcul Vectoriel (produits scalaire et vectoriel)*

### 3.1 Courbes Paramétrées

#### Définition et Motivation

**Définition 3.1.** Soit  $\vec{f} : I \rightarrow^n, t \mapsto \vec{f}(t)$ , avec  $n = 2$  ou  $3$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\vec{f}$  est une courbe paramétrée.

Cette définition vient du fait qu'on essaie de renvoyer une trajectoire uni-dimensionnelle dans un espace multi-dimensionnel. La courbe que la fonction  $\vec{f}$  va tracer va être un fil dans l'espace 2D ou 3D. La figure 8 représente une hélice en 3D.

En physique, 't' de l'espace de départ symbolise souvent le temps, alors que  $\vec{f}(t)$  est un vecteur 2D ou 3D qui symbolise un vecteur variant dans le temps, comme une position, une vitesse, une force, etc.

<sup>1</sup>Les notions introduites peuvent aussi être généralisés à n'importe quelle dimension  $n$

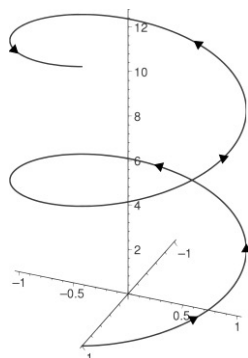


Figure 8: Courbe paramétrée représentant un hélice.

Donnons l'exemple de la courbe  $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Pour la tracer dans le plan, on a besoin de spécifier l'intervalle où l'on doit varier  $t$ , calculer  $\vec{x}(t)$  et placer ces points sur le plan.  $t$  intervient donc implicitement dans le traçage de la courbe.

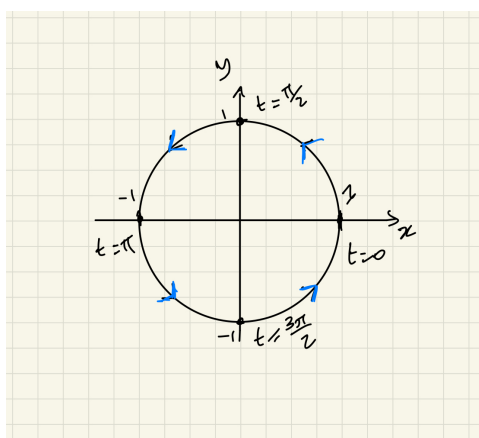
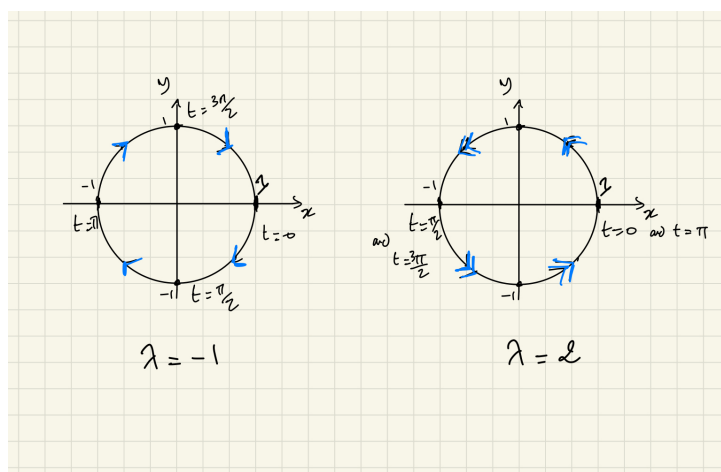


Figure 9: Cercle paramétré de rayon 1

Comme la figure 9 le montre, la courbe  $= \{\vec{x}(t), t \in \mathbb{R}\}$  est en fait un cercle! Ceci découle du fait qu'on peut substituer  $x = \cos(t)$  et  $y = \sin(t)$  et donc  $x^2 + y^2 = 1$ , d'où l'équation d'un cercle. On s'est débarrassé entièrement du paramètre  $t$  et on a eu la même courbe. Ce luxe de se débarrasser du paramètre n'est pas donné à toutes les fonctions. Mais ce n'est pas vraiment un luxe, c'est une perte d'information! Pour bien voir cela, On peut considérer les courbes paramétrées  $\vec{x}_0(t) = (\cos(\lambda t), \sin(\lambda t))$ , pour un  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixe. Si l'on applique la même substitution d'avant, on voit que  $\vec{x}_0(t)$  trace aussi un cercle. Pour une seule courbe, il y a donc une infinité de paramétrisations. La figure 10 montre les cas de  $\lambda = -1$  et  $\lambda = 2$ .

Pour la courbe  $\vec{x}(t)$  on voit que la trajectoire achève un cercle de  $t = 0$  à  $t = 2\pi$ . Pour la deuxième courbe, si l'on prend  $\lambda = 2$ , la courbe  $\vec{x}_0(t)$  trace un cercle complet de  $t = 0$  à  $t = \pi$ , donc 2 fois plus vite. Si l'on généralise à n'importe quel  $\lambda$ , on voit que  $\vec{x}_0(t)$  est  $\lambda$  fois plus 'rapide' que  $\vec{x}(t)$ , donc  $\lambda$  encode la vitesse du parcours de la courbe. De plus si l'on prend  $\lambda = -1$ ,  $\vec{x}_0(t)$  trace un cercle dans le sens des aiguilles de la montre, alors que  $\vec{x}(t)$  le fait dans le sens inverse.

Figure 10: Cercle de rayon 1 paramétré par  $\lambda$ 

### Dérivées et tangentes

**Définition 3.2.** Soit  $\vec{f} : I \rightarrow^n$  une courbe paramétrée. On pourrait écrire  $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$  si  $n = 2$  ou  $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  si  $n = 3$  pour tout  $t \in R$ , avec  $f_1(t), f_2(t), f_3(t) \in \mathbb{R}$ . On dit que la courbe paramétrée  $\vec{f}$  est dérivable en un point  $t^*$  si les fonctions réelles  $f_1, f_2$  et  $f_3$  sont dérivables en  $t^*$ . Dans ce cas, on note  $t \mapsto \vec{f}'(t)$  sa dérivée.

Supposons que la courbe paramétrée  $\vec{r}(t)$  est dérivable et notons  $\vec{r}'(t)$  sa dérivée. On sait que dans le cas d'une fonction réelle, la dérivée d'une fonction en un point s'interprète comme la pente de la tangente à la courbe à ce point. Si l'on note  $\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$  alors  $r'_i(t^*)$  est la pente de la tangente à  $\vec{r}(t)$  dans la direction  $i$  dans le point  $t^*$ . En sommant les contributions, on interprète  $\vec{r}'(t^*)$  comme le vecteur tangent à la courbe  $\vec{r}(t)$  dans le point  $t^*$ . Dans la figure 11 on remarque qu'en s'approchant de  $\vec{r}(t)$  le vecteur  $\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$  est de plus en plus tangent à la courbe en  $t$ .

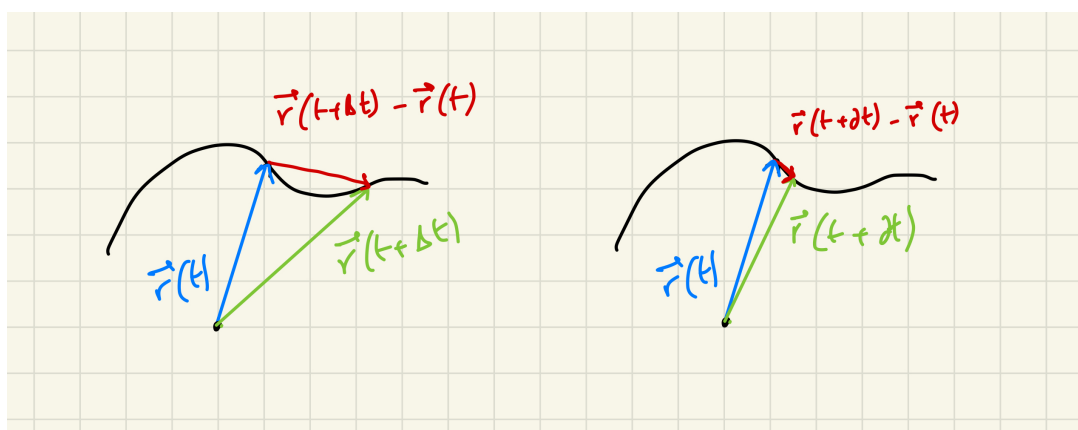


Figure 11: Visualisation de la dérivée d'une courbe paramétrée

**Note 3.2.** En physique, on traite souvent la dérivée  $f' = \frac{df}{dt}$  comme une fraction, ce qui nous mène joyeusement à écrire  $df = f' dt$ . Une hérésie pour les analystes, un réflexe quotidien pour les physiciens !

### Propriétés de la dérivée

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle, et  $\vec{g}, \vec{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux courbes paramétrées dérivables. On a les formules suivantes :

- **Dérivée d'un produit scalaire (fonction scalaire  $\times$  vecteur) :**

$$\frac{d}{dt} (f(t)\vec{g}(t)) = f'(t)\vec{g}(t) + f(t)\vec{g}'(t)$$

- **Dérivée d'un produit scalaire (vecteurs) :**

$$\frac{d}{dt} (\vec{g}(t) \cdot \vec{h}(t)) = \vec{g}'(t) \cdot \vec{h}(t) + \vec{g}(t) \cdot \vec{h}'(t)$$

- **Dérivée d'un produit vectoriel :**

$$\frac{d}{dt} (\vec{g}(t) \wedge \vec{h}(t)) = \vec{g}'(t) \wedge \vec{h}(t) + \vec{g}(t) \wedge \vec{h}'(t)$$

- **Dérivée d'un produit mixte (triple scalaire) :**

$$\frac{d}{dt} (\vec{g}(t) \cdot (\vec{h}(t) \wedge \vec{k}(t))) = \vec{g}' \cdot (\vec{h} \wedge \vec{k}) + \vec{g} \cdot (\vec{h}' \wedge \vec{k}) + \vec{g} \cdot (\vec{h} \wedge \vec{k}')$$

- **Dérivée de la norme d'un vecteur (si  $\vec{g}(t) \neq \vec{0}$ ) :**

$$\frac{d}{dt} (\|\vec{g}(t)\|) = \frac{\vec{g}(t) \cdot \vec{g}'(t)}{\|\vec{g}(t)\|}$$

### Longueur d'arc

Soit  $\vec{x}(t)$  une courbe paramétrée dans le plan, définie sur un intervalle  $[t_i, t_f]$ . Cette courbe peut représenter la trajectoire d'une particule se déplaçant dans le plan. Nous nous intéressons à la longueur du trajet parcouru entre les instants  $t_i$  et  $t_f$ .

Dans un premier temps, supposons que la trajectoire est rectiligne. La particule se déplace alors en ligne droite entre les points  $\vec{x}(t_i)$  et  $\vec{x}(t_f)$ . D'après le théorème de Pythagore, la longueur  $L$  du segment parcouru est donnée par :

$$L = \sqrt{(x_1(t_f) - x_1(t_i))^2 + (x_2(t_f) - x_2(t_i))^2}$$

On introduit la notation suivante :

$$\Delta x_j = x_j(t_f) - x_j(t_i), \quad \text{pour } j \in \{1, 2\}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$L = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$$

Supposons maintenant que la trajectoire n'est plus une ligne droite, mais une courbe qui peut être **approchée par morceaux de lignes droites**. Pour cela, on découpe l'intervalle  $[t_i, t_f]$  en  $n$  sous-intervalles :

$$t_i = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t_f$$

Sur chaque intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$ , on suppose que la trajectoire est suffisamment régulière pour être **approximée par une ligne droite**. La longueur  $L$  de la trajectoire complète est alors approximée par la somme des longueurs de ces segments :

$$\begin{aligned} L &\approx \sqrt{(x_1(t_1) - x_1(t_0))^2 + (x_2(t_1) - x_2(t_0))^2} \\ &+ \sqrt{(x_1(t_2) - x_1(t_1))^2 + (x_2(t_2) - x_2(t_1))^2} \\ &+ \dots \\ &+ \sqrt{(x_1(t_n) - x_1(t_{n-1}))^2 + (x_2(t_n) - x_2(t_{n-1}))^2} \\ &:= \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(x_1(t_{j+1}) - x_1(t_j))^2 + (x_2(t_{j+1}) - x_2(t_j))^2} \end{aligned}$$

Lorsque le découpage devient de plus en plus fin (c'est-à-dire lorsque  $\forall j, t_{j+1} - t_j \rightarrow 0$ ), on tend vers le cas continu, et dans ce cas, il faut remplacer le symbole de la somme discrète  $\Sigma$  par une intégrale  $\int$  sur les longueurs infinitésimales qu'on symbolise par  $dx_i$  au lieu de  $\Delta x_i$ . On note aussi  $dl$  la longueur infinitésimale de la courbe, i.e.  $dl = \|d\vec{x}\|$ . La **longueur exacte** de la courbe entre  $t_i$  et  $t_f$  est

$$L = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \|d\vec{x}\| \quad (1)$$

Ce que montre la relation (1), c'est que la longueur de la courbe ne dépend pas de la paramétrisation, mais seulement de la courbe tracée entre les positions  $\vec{x}_0$  et  $\vec{x}_f$ . Mais si je vous demande d'évaluer cette intégrale, vous ne pourriez pas, et c'est ici que rentre l'utilité de la paramétrisation. On pourrait remarquer qu'en multipliant et divisant par  $dt$

$$L = \int_{t_i}^{t_f} \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2} dt \quad (2)$$

Cette formule donne la longueur exacte de la trajectoire parcourue, et elle se généralise naturellement au cas où  $\vec{x}(t)$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Note 3.3. Invariance de paramétrisation** Soit  $\vec{x}(t)$  une courbe paramétrée. On considère une reparamétrisation donnée par une fonction bijective  $\tau : t \mapsto \tau(t)$ . On note  $\tau_i = \tau(t_i)$  et  $\tau_f = \tau(t_f)$ . Alors, la longueur de la courbe s'écrit :

$$\begin{aligned}
 L &= \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2} \cdot \frac{dt}{d\tau} d\tau \\
 &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2} d\tau
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de remplacer  $t$  par  $\tau$  dans l'intégrale, et on retrouve exactement la même expression pour la longueur.

**Conclusion :** la longueur d'une courbe est **invariante par reparamétrisation**.

## 3.2 Surfaces et Volumes

On a vu que les courbes paramétrées sont modélisées par des fils dans des espaces. On pourrait utiliser la même définition modifiée pour permettre d'avoir des surfaces.

**Note 3.4.** Il convient de distinguer les deux termes : **surface** et **aire**. Le mot **surface** désigne toute région de l'espace possédant une structure bidimensionnelle (2D). En revanche, le terme **aire** fait référence à une mesure associée à cette surface. Exemple: Surface: Terrain de football, et son aire est 7000 m<sup>2</sup>. Le terme **volume** fera référence à la fois à la région 3D et aussi à la mesure qui lui est associée.

### Définitions

#### Définition 3.3. Surface par immersion

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un sous-ensemble d'intérieur non vide, et soit  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  définie par :

$$\vec{F}(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v)).$$

On appelle **surface paramétrée (ou surface par immersion)** l'ensemble :

$$\Sigma = \{ \vec{F}(u, v) \mid (u, v) \in A \}.$$

C'est quoi d'abord  $A$  est d'intérieur non vide? Si  $A \subset \mathbb{R}^2$ , elle a une frontière qui délimite la surface  $A$  et un intérieur comme le montre la figure 12. Si l'intérieur est vide, alors  $A$  n'est qu'une frontière. Il faut savoir que la frontière a toujours une dimensionnalité de moins que la surface. Donc en 2D, la frontière est unidimensionnelle, donc si l'on paramétrise ça devient une courbe paramétrée discutée avant! Si  $A$  est une frontière, alors elle n'est qu'une courbe et la fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  est équivalente à une courbe paramétrée! Il faut donc écarter ce cas et supposer que  $A$  est d'intérieur non vide pour qu'il possède

2 degrés de liberté. L'idée derrière cette définition est qu'on a 2 degrés de liberté dans l'ensemble  $A$  qu'on *immerge* à l'espace  $3D$ , d'où le nom de la définition 3.3.

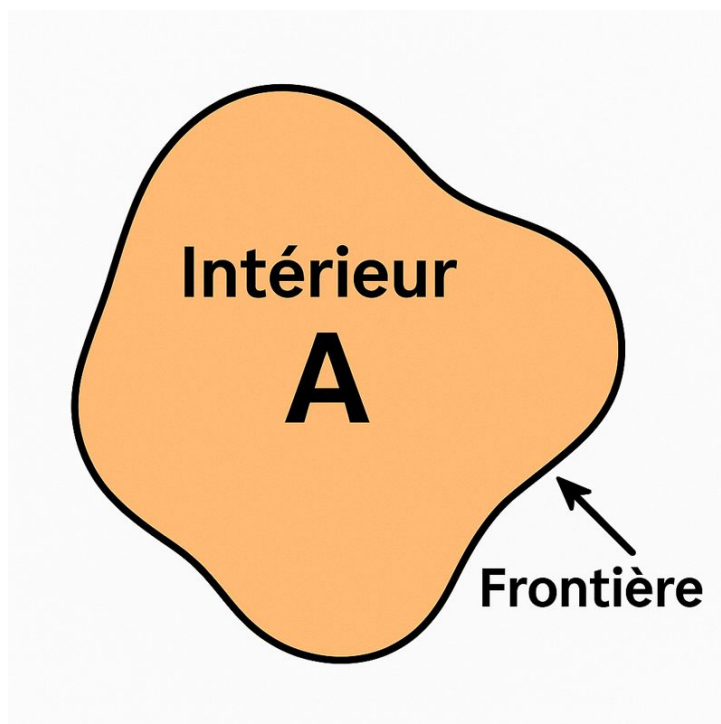


Figure 12: surface d'intérieur non vide

On peut également définir une surface d'une autre manière. On prend une fonction tridimensionnelle  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$  et on impose qu'elle soit égale à une constante  $c$ . Sans cette contrainte, la fonction  $F$  a 3 degrés de liberté. Mais avec cette contrainte, il n'en reste qu'au max 2, c'est ce dont on a besoin pour une surface. Cette définition de surface s'appelle définition par submersion.

**Définition 3.4. Surface par submersion**

Soit  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ , et soit  $c \in \mathbb{R}$  une constante.

On appelle **surface (ou ensemble de niveau)** l'ensemble :

$$\Sigma_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = c\}.$$

$F$  est dite une **submersion** sur  $\Sigma$ .

On considère l'exemple d'une surface sphérique en dimension 3, de rayon  $r = 1$ .

Par **immersion**, on peut la définir à l'aide des *coordonnées sphériques* via l'application suivante :

$$\vec{F} : (\theta, \phi) \mapsto (\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta),$$

où  $(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ . La surface correspondante est donnée par  $\Sigma = \vec{F}(\mathbb{R}^2)$ , qui décrit la sphère unité.

Par **submersion**, on peut utiliser la fonction suivante :

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

La surface sphérique unité est alors décrite comme l'ensemble de niveau :

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x, y, z) = 1\}.$$

Ces deux descriptions seront utiles par la suite pour le calcul d'intégrales de surface ou de volume. Aucune n'est meilleure que l'autre : le choix dépend du problème à traiter, de la nature de la surface, et de la forme des expressions à évaluer.

Si l'on connaît une paramétrisation explicite de la surface, la définition par immersion est souvent la plus directe. En revanche, si la surface est donnée naturellement comme un niveau  $F(x, y, z) = c$  et que l'on peut facilement résoudre pour une variable (par exemple  $z = z(x, y)$ ), la submersion devient très pratique.

Et si aucune des deux approches ne simplifie les choses... eh bien May God help you.

### Bonus:

Un petit bonus pour récompenser tes efforts : voici la surface d'un ruban de Möbius, définie par **immersion**. C'est un exemple célèbre de surface non orientable. Voir la figure 13. Pour la définir, on utilise ici le paramétrage suivant :

$$\vec{F}(u, v) = \left( \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos u, \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin u, \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right),$$

avec  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ .

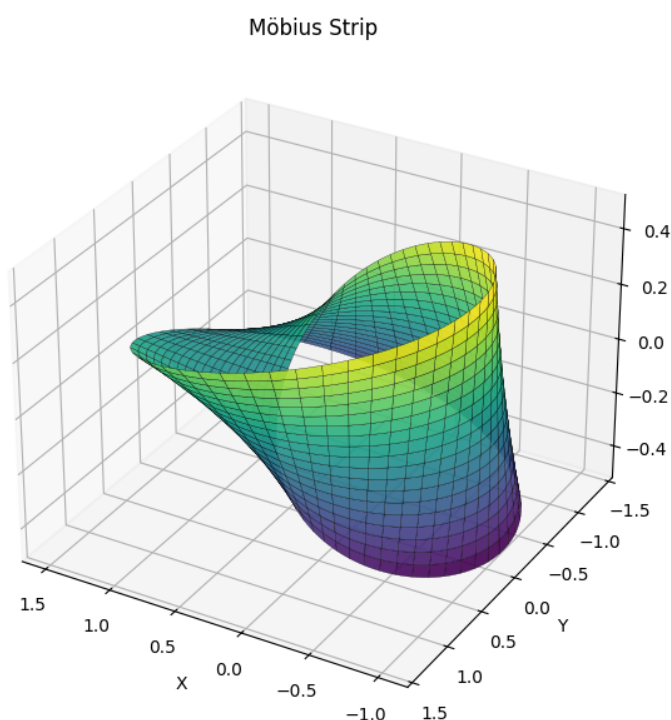


Figure 13: La surface d'un ruban de Möbius

### Intégrale double

On sait que le calcul d'aires fait appel aux intégrales. Pour résumer : si l'on considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , l'aire délimitée par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses  $y = 0$ , et les droites verticales  $x = a$  et  $x = b$  s'exprime par

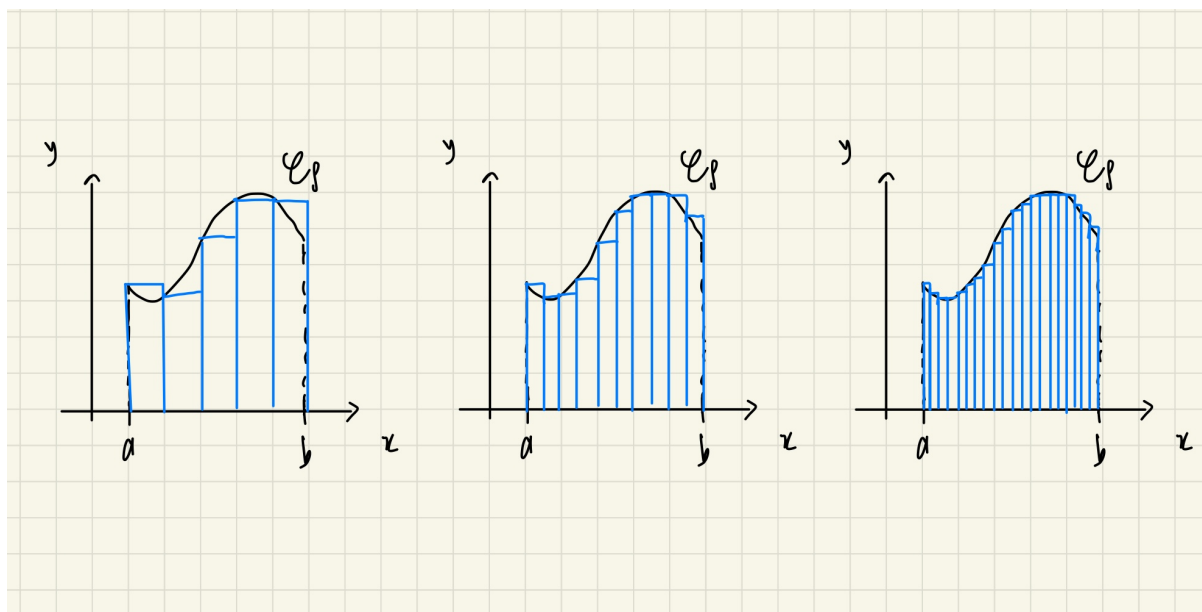


Figure 14: Approximation de l'aire sous une courbe avec les sommes de Riemann

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Cette quantité est la limite d'une somme des aires infinitésimales  $f(x)dx$  comme ce que montre la figure 14 en rendant la largeur des rectangles de plus en plus petite.

Si l'aire cherchée est comprise entre deux courbes associées aux fonctions  $f$  et  $g$ , avec  $f(x) \geq g(x)$  sur  $[a, b]$ , alors elle se calcule par la différence

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx, \quad (4)$$

puisque l'on additionne les aires infinitésimales des rectangles de hauteur  $f(x) - g(x)$  et de largeur  $dx$ .

Remarquons que  $dx$  a la dimension d'une longueur ( $[dx] = [x] = L$ ) et, pour que  $f(x)dx$  représente une aire, il faut que  $f(x)$  soit également de dimension longueur ( $[f(x)] = L$ ). Ainsi, l'élément  $f(x)dx$  a bien la dimension d'une aire ( $[f(x)dx] = L^2$ ). Étant donné que l'intégrale représente une somme continue de telles quantités, l'aire totale  $A$  possède naturellement une dimension d'aire :  $[A] = L^2$ .

Cette méthode d'intégrale, bien qu'elle soit utile, elle n'est pas généralisable au calcul de l'aire de toute surface de  $^2$ . Pour cela regardons le cas d'une intégrale du type  $I = \int_a^b dx$ . On pourrait bien interpréter cette quantité comme l'aire sous la fonction  $f : x \mapsto 1$  si l'on donne au 1 une dimension de longueur. Sinon, au cas où le 1 est sans dimension, l'unique source de dimension est le  $dx$ , donc cette intégrale a une unité de longueur.  $I$  est donc la longueur de l'intervalle  $[a, b]$ , c'est-à-dire  $I = b - a$ . Si par exemple on intègre sur une union d'intervalles disjoints  $I = \int_{[a,b] \cup [c,d]} dx$ , alors  $I$  est la longueur totale de cette région de l'espace qui est égale à  $I = (b - a) + (c - d)$ . En gros, si  $J \subset \mathbb{R}$  est 'mesurable' alors  $I = \int_J dx$  va mesurer la longueur totale (ou bien l'aire unidimensionnelle) de l'ensemble  $J$ . Voilà un bon point de départ.

Supposons maintenant que l'on a une surface  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  comme dans la figure 15. On va s'inspirer du cas unidimensionnel discuté dans le paragraphe précédent pour élaborer

comment calculer l'aire  $S$ . On pourrait voir  $S$  comme une collection de surfaces infinitésimales d'aire  $dxdy$ , et donc pour calculer l'aire de  $S$ , il est suffisant de sommer ces aires infinitésimales de la région  $S$ . Au lieu d'utiliser un seul symbole  $\int$ , on utilise  $\iint$  pour indiquer qu'on somme sur 2 dimensions, avec une  $\int$  associée au  $dx$  et la deuxième associée au  $dy$ . Alors on a

$$A = \iint_S dxdy \quad (5)$$

En réduisant les tailles  $dx$  et  $dy$  on s'approche de plus en plus à calculer exactement l'aire de la surface  $S$ .

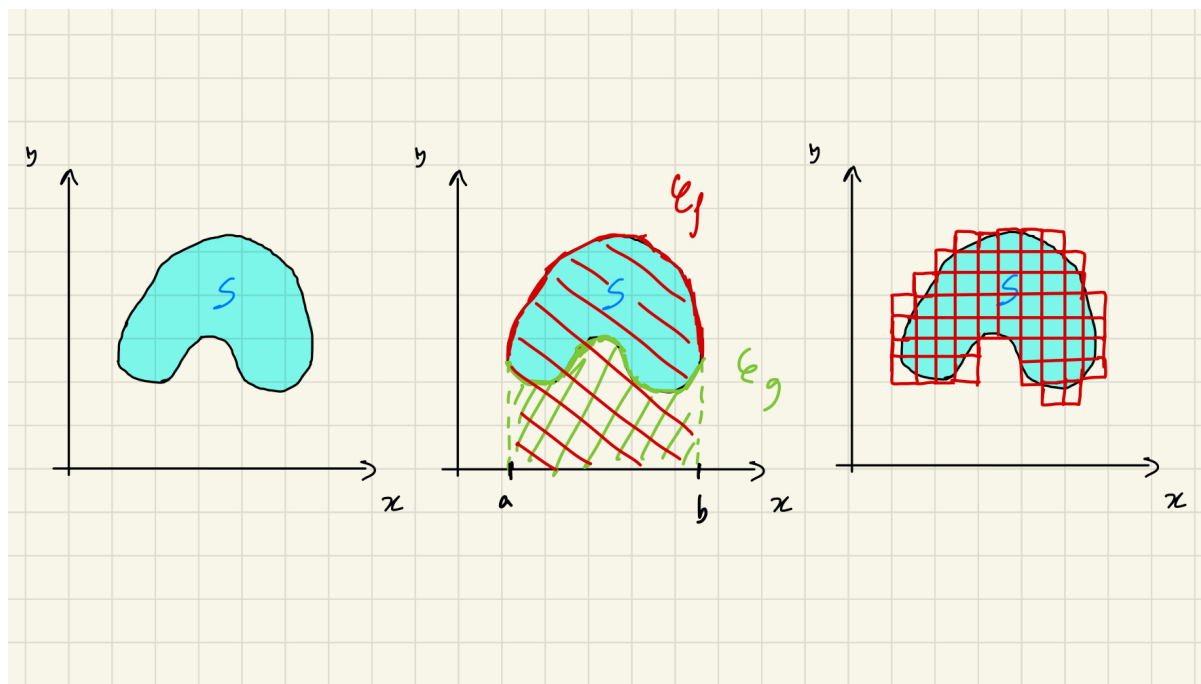


Figure 15: Calcul de l'aire avec intégrales simple et double

Maintenant, pour procéder au calcul de  $A$ , il faut modéliser la surface  $S$  mathématiquement. Si  $S$  est un rectangle délimité par ses 2 coins  $(0, 0)$  et  $(L, l)$  alors on sait bien que son aire va être  $A = L \times l$ . En termes de double intégrale, on a

$$A = \iint_S dxdy = \int_0^l \int_0^L dxdy = \int_0^l Ldy = L \int_0^l dy = L \times l$$

Ci-dessus, on a intégré d'abord sur  $x$  et puis sur  $y$ . Ce n'est pas toujours évident comme on va voir après car il se peut que  $y$  dépende de  $x$ , ou bien l'inverse, et dans ce dernier cas il faut intégrer sur  $y$  puis sur  $x$ . N'ayez pas peur, on va tout expliquer.

### Exercice 3.1. Calcul de l'aire d'un disque par intégrale double

On considère un disque de rayon  $r$  centré en  $(r, 0)$  dans le plan  $(x, y)$ . Déterminer l'aire  $A$  du disque en utilisant une intégrale double.

Pour modéliser un disque on se sert de

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y - r)^2 \leq r^2\}$$

Comme  $x$  peut parcourir  $[-r, r]$  dans son entièreté on peut la laisser libre, mais  $y$  va être contrainte selon

$$\begin{aligned} x^2 + (y - r)^2 \leq r^2 &\Leftrightarrow (y - r)^2 \leq r^2 - x^2 \\ &\Leftrightarrow |y - r| \leq \sqrt{r^2 - x^2} \\ &\Leftrightarrow r - \sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq r + \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

On commence par exprimer l'aire :

$$A = \iint_S dx dy.$$

Pour fixer les bornes d'intégration, on remarque que pour un  $x$  fixé,  $y$  varie entre :

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{et} \quad y = r + \sqrt{r^2 - x^2},$$

avec  $x$  parcourant  $[-r, r]$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-r}^r \left( \int_{r - \sqrt{r^2 - x^2}}^{r + \sqrt{r^2 - x^2}} dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r [y]_{r - \sqrt{r^2 - x^2}}^{r + \sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r \left( r + \sqrt{r^2 - x^2} - (r - \sqrt{r^2 - x^2}) \right) dx \\ &= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

On reconnaît ici une intégrale classique à traiter par une substitution trigonométrique. On pose :

$$x = r \sin \theta, \quad \text{avec} \quad \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Alors :

$$dx = r \cos \theta d\theta, \quad \text{et} \quad r^2 - x^2 = r^2(1 - \sin^2 \theta) = r^2 \cos^2 \theta.$$

Substituons :

$$\begin{aligned}
A &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 \cos^2 \theta} \times r \cos \theta \, d\theta \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos \theta \times r \cos \theta \, d\theta \\
&= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta. \\
&= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta \\
&= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta \\
&= r^2 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right), \\
&= \pi r^2.
\end{aligned}$$

On retrouve bien la formule classique de l'aire d'un disque de rayon  $r$ . et on retrouve finalement l'aire de la sphère  $S$ . On a pu conclure dès la 3ème ligne que c'est égal à  $2 \times \frac{1}{2} \pi r^2$ , puisque l'intégrale n'est que l'aire d'une demi-sphère et donc multipliée par 2 nous donne l'aire de toute la sphère.

Vous pourriez noter que le calcul d'aire à l'aide de doubles intégrales se ramène facilement au calcul de l'aire en utilisant une seule intégrale. Néanmoins, ce n'est pas l'usage unique de ces doubles intégrales car on peut insérer n'importe quelle fonction  $f(x, y)$  à l'intérieur de  $\iint \dots dx dy$ . Mais qu'est-ce que cette quantité va modéliser? Cela dépend de l'unité qu'on donne à  $f(x, y)$ !

Si  $f(x, y)$  a une unité de longueur, alors  $\iint f(x, y) dx dy$  a une unité de volume, puisque  $dx$  et  $dy$  ont des unités de longueur aussi. Cette quantité modélise le volume sous la surface de  $f(x, y)$  dans 3D comme le montre la figure 16. La surface ( $S_f$ ) représente la surface tracée par  $(x, y, z(x, y))$  et la surface ( $S$ ) est la région du plan sur laquelle on aimerait intégrer. La région colorée en vert est le volume qu'on aimerait calculer en sommant toutes les tours de hauteur  $f(x, y)$  et de base d'aire  $dx dy$  qui se trouve dans ( $S$ ).

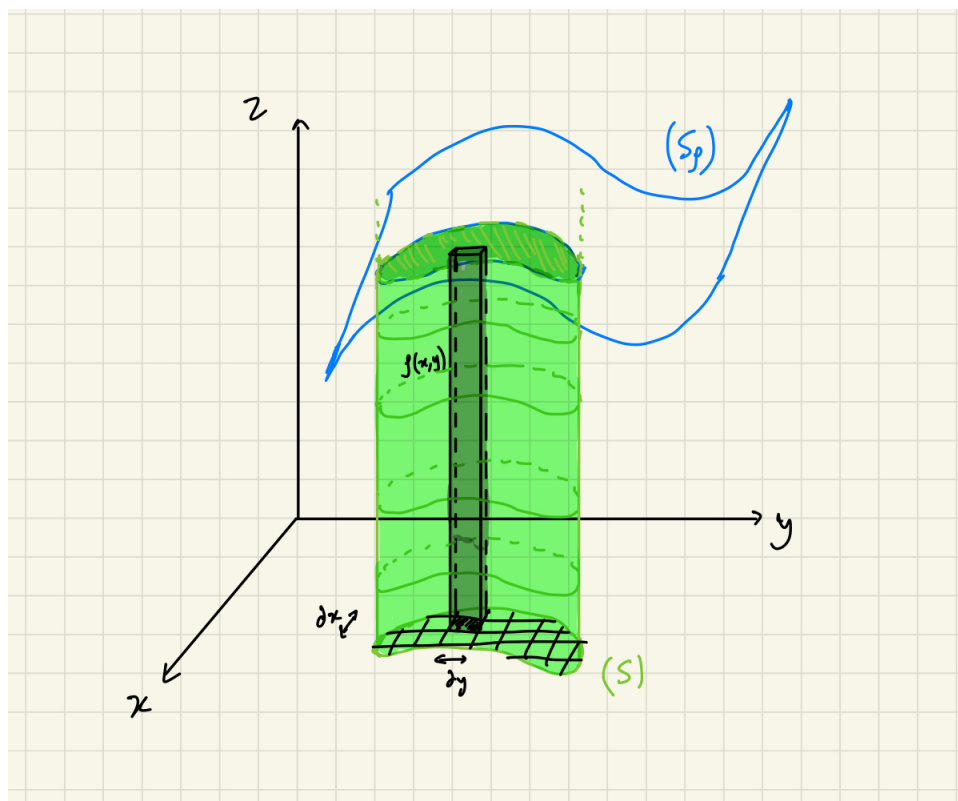


Figure 16: Calcul du volume sous une courbe avec les intégrales doubles

Si  $f(x, y)$  a une unité de pression par exemple alors  $\iint f(x, y) dx dy$  a une unité de force car on sait que  $F = P \times A$ . Si l'on connaît la pression à tout point  $(x, y)$  d'une force sur une surface, par un calcul simple on connaîtra la force appliquée sur cette surface.

Essayons de calculer par exemple le volume d'une demi-sphère en 3D de rayon  $r > 0$ . On sait que son volume est  $\frac{2}{3}\pi r^3$  pour le sanity-check. La fonction  $z = f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$  représente le toit de la sphère. Alors le volume est donné par :

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_S f(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dy dx & (a) \\
 &= \int_{-r}^r \int_{-u}^u \sqrt{u^2 - y^2} dy dx & (b) \\
 &= \int_{-r}^r \frac{\pi}{2} u^2 dx & (c) \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\
 &= \frac{2}{3} \pi r^3
 \end{aligned}$$

Vous avez pu remarquer que dans la ligne **a** on n'a pas intégré  $y$  sur  $[-r, r]$  tout entier mais on l'a contraint en fonction de  $x$ . Cela est normal, car si on a pris  $x = r$  et  $y = r$  on aura  $\sqrt{r^2 - r^2 - r^2} = \sqrt{-r^2}$ , ce qui est imaginaire. Le domaine de définition est donc le

disque  $S = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . La transition de la ligne **b** vers la ligne **c** a été faite en se basant sur l'intégrale sur  $y$  correspond à l'aire d'une demi-sphère de rayon  $u$  que l'on considère fixe par rapport à  $y$  puisqu'il ne dépend que de  $x$ .

### Intégrale triple

Cette partie ne va pas trop différer de la partie précédente. Si on a pu transitionner de  $1D$  vers  $2D$ , alors ce serait plus facile de transitionner de  $2D$  vers  $3D$ . Pour calculer un volume, on pourrait l'assimiler à un volume sous une surface décrite par une fonction  $z = f(x, y)$  délimitée par la région  $S$  et calculer le volume comme  $\iint_S f(x, y) dx dy$ . Au lieu de sommer les tours infinitésimales  $f(x, y) dx dy$ , on pourrait aussi sommer les volumes cubiques  $dx dy dz$  dans la région de l'espace  $R$ . Le volume  $V$  est calculé comme

$$V = \iiint_R dx dy dz \quad (6)$$

où le triple intégral indique qu'on somme sur les 3 axes.

#### Exercice 3.2. Calcul du volume d'une pyramide à base carrée

On considère une pyramide de hauteur  $h$ , dont la base est un carré de côté  $b$ , situé dans le plan  $z = 0$ . Le sommet de la pyramide est à la hauteur  $z = h$  au-dessus du centre du carré. Déterminer le volume  $V$  de la pyramide en utilisant une intégrale triple en coordonnées cartésiennes.

La base du carré est centrée à l'origine  $(x, y) = (0, 0)$ , donc ses coins sont aux points  $(\pm b/2, \pm b/2)$ .

À une hauteur donnée  $z$ , la section horizontale de la pyramide est un carré dont le côté  $s(z)$  est proportionnel à l'altitude restante  $(h - z)$ . Quand  $z = 0$ ,  $s(0) = b$ , et quand  $z = h$ ,  $s(h) = 0$ .

La relation est donc :

$$s(z) = b \left(1 - \frac{z}{h}\right).$$

À un niveau  $z$  donné, les coordonnées  $(x, y)$  varient dans un carré de centre  $(0, 0)$  et de côté  $s(z)$ , soit :

$$-\frac{s(z)}{2} \leq x \leq \frac{s(z)}{2}, \quad -\frac{s(z)}{2} \leq y \leq \frac{s(z)}{2}.$$

Le volume  $V$  s'écrit donc :

$$V = \int_0^h \int_{-s(z)/2}^{s(z)/2} \int_{-s(z)/2}^{s(z)/2} dx dy dz.$$

On commence par intégrer en  $x$  :

$$\int_{-s(z)/2}^{s(z)/2} dx = s(z),$$

puis en  $y$  :

$$\int_{-s(z)/2}^{s(z)/2} s(z) dy = s(z)^2.$$

Le volume devient alors :

$$V = \int_0^h s(z)^2 dz.$$

Substituons  $s(z)$  :

$$s(z)^2 = b^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2.$$

Donc :

$$V = b^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz.$$

Développons le carré :

$$\left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 = 1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2},$$

ce qui donne :

$$V = b^2 \left( \int_0^h 1 dz - \frac{2}{h} \int_0^h z dz + \frac{1}{h^2} \int_0^h z^2 dz \right).$$

Calculons chaque intégrale :

$$\int_0^h 1 dz = h,$$

$$\int_0^h z dz = \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \frac{h^2}{2},$$

$$\int_0^h z^2 dz = \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{h^3}{3}.$$

Substituons :

$$\begin{aligned} V &= b^2 \left( h - \frac{2}{h} \times \frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2} \times \frac{h^3}{3} \right) \\ &= b^2 \left( h - h + \frac{h}{3} \right) \\ &= b^2 \times \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$V = \frac{1}{3} b^2 h.$$

Ce qui est bien la formule classique du volume d'une pyramide à base carrée.

Bien sûr, on ne va pas utiliser les triples intégrales juste pour calculer des volumes. Si l'on se donne une fonction  $f(x, y, z)$  d'une unité quelconque  $X$ , alors  $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$  a une unité de  $X \times L^3$ . Par exemple supposons qu'on connaît parfaitement la densité volumique  $\rho(x, y, z)$  d'un fluide en tout point de l'espace. Pour calculer la masse d'un fluide occupant une région  $R$  de l'espace, il suffit de calculer la quantité

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z) dx dy dz$$

### 3.3 Champs scalaires et vectoriels

#### Champ scalaire

**Définition 3.5.** Un **champ scalaire** est une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe un réel à chaque point de l'espace.

L'idée d'un champ scalaire est d'attribuer à chaque point de l'espace une grandeur purement numérique, c'est-à-dire une valeur sans direction. C'est une manière de modéliser des phénomènes physiques qui varient d'un point à un autre, mais qui n'ont pas de sens d'orientation.

#### Exemples de champs scalaires :

- La température dans une pièce :  $T(x, y, z)$ ,
- La pression atmosphérique dans un volume d'air :  $P(x, y, z)$ ,
- Le potentiel électrique ou gravitationnel :  $V(x, y, z)$ .

Ces fonctions permettent de visualiser l'espace comme « rempli » d'une certaine quantité, variable d'un point à un autre, mais toujours décrite par un seul nombre réel. La figure 17 montre un champ scalaire associé à l'emplacement de Messi sur le terrain qu'on pourrait l'interpréter comme la "température de Messi sur le terrain". D'où le nom *Heat Map*.

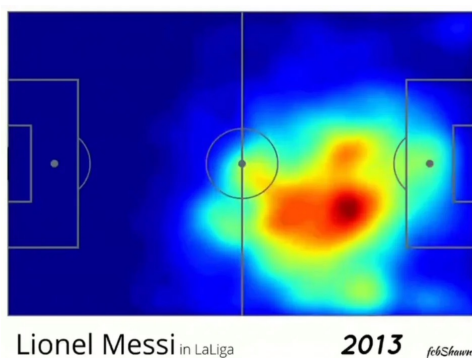


Figure 17: Champs scalaire associé à la position moyenne de Messi sur le terrain.

#### Champ vectoriel

**Définition 3.6.** Un **champ vectoriel** est une fonction  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui associe un vecteur à chaque point de l'espace.

Autrement dit, un champ vectoriel attribue à chaque point de l'espace un vecteur, c'est-à-dire une grandeur ayant à la fois une norme et une direction. Les champs vectoriels sont utilisés pour modéliser des phénomènes où des quantités se déplacent, s'écoulent ou exercent des forces dans l'espace.

#### Exemples de champs vectoriels :

- Le champ de vitesse d'un fluide (air, eau) :  $\vec{v}(x, y, z)$ ,
- Le champ de force gravitationnelle :  $\vec{g}(x, y, z)$ ,
- Le champ électrique ou magnétique :  $\vec{E}(x, y, z)$ ,  $\vec{B}(x, y, z)$ .

Dans une représentation graphique comme dans 18, un champ vectoriel peut être visualisé comme une forêt de flèches attachées à chaque point de l'espace, indiquant la direction et l'intensité d'une action locale.

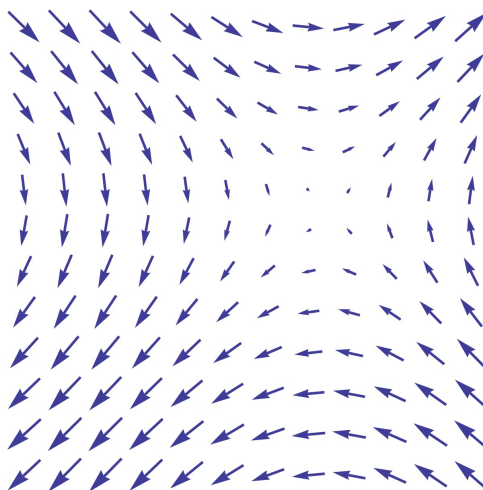


Figure 18: Représentation d'un champ vectoriel 2D

#### Les opérateurs différentiels

Pour étudier les variations des champs scalaires et vectoriels, nous aurons besoin des opérateurs différentiels suivants : le gradient (*grad*), la divergence (*div*), le rotationnel (*curl*) et le laplacien. Ces opérateurs reposent sur les dérivées partielles des fonctions scalaires et vectorielles. On définit

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (7)$$

qu'on traitera comme vecteur qui opère sur des fonctions comme on verra en suite.

#### Gradient

**Définition 3.7. Gradient**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  deux champs scalaires définis respectivement en dimension 2 et 3. Le gradient de  $f$  est le vecteur  $\vec{\nabla}f$  défini par :

$$\vec{\nabla}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

et le gradient de  $g$  est le vecteur  $\vec{\nabla}g$  défini par :

$$\vec{\nabla}g = \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right).$$

Le **gradient** d'un champ scalaire  $f$  est un champ vectoriel, noté  $\nabla f$  ou  $\vec{\nabla}f$ , qui indique la direction de la plus forte variation locale de  $f$  ainsi que le taux de variation maximal dans cette direction. Le gradient peut être défini pour tout champ scalaire défini sur  $\mathbb{R}^n$  (pas seulement pour  $n = 2$  ou  $3$ ). Dans le cas particulier  $n = 1$ , on retrouve simplement la dérivée ordinaire :

$$\nabla f = \frac{df}{dx}.$$

**Divergence****Définition 3.8. Divergence**

Soit  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (F_x(x, y), F_y(x, y))$  un champ vectoriel en 2D. La divergence de  $\vec{F}$  est une fonction scalaire définie par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}.$$

Soit  $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (G_x(x, y, z), G_y(x, y, z), G_z(x, y, z))$  un champ vectoriel en 3D. La divergence de  $\vec{G}$  est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}.$$

La **divergence** d'un champ vectoriel mesure la tendance du champ à s'éloigner (ou converger) d'un point donné. C'est une quantité scalaire qui indique, en chaque point, s'il y a **création** (source), **annihilation** (puits), ou **conservation locale** du flux du champ. Une divergence positive indique un comportement de source, tandis qu'une divergence négative indique un comportement de puits comme l'indique la figure 19.

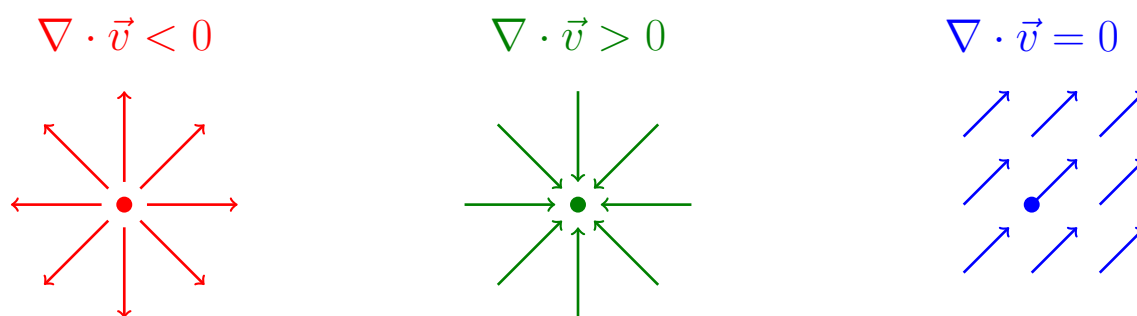


Figure 19: Les cas de la divergence d'un champ vectoriel.

Comme le gradient, la divergence peut être définie dans  $\mathbb{R}^n$  pour tout champ vectoriel  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , auquel cas :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

## Rotationnel

### Définition 3.9. Rotationnel

Soit  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ vectoriel. Le rotationnel (ou curl) de  $\vec{F}$  est un champ vectoriel défini par :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Le **rotationnel** d'un champ vectoriel mesure la tendance locale du champ à effectuer une rotation autour d'un point. Il peut être interprété comme le vecteur associé à l'axe et à l'intensité de la rotation infinitésimale du champ autour de ce point. La direction du vecteur  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  indique l'axe de rotation, et sa norme représente la vitesse de rotation locale.

Le rotationnel n'est défini que dans  $\mathbb{R}^3$  (ou plus généralement, dans des espaces orientés munis d'un produit vectoriel), car il repose sur une structure tridimensionnelle. On peut le définir pour un champ vectoriel  $\vec{F}(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , mais il faut le mettre dans  $\mathbb{R}^3$  en supposant que  $F_z(x, y) = 0$ . Comme ça on a un champ vectoriel bien défini dans  $\mathbb{R}^3$  et son rotationnel est le vecteur

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( 0, 0, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right),$$

puisque les composantes  $F_x$  et  $F_y$  ne dépendent pas de  $z$  et que  $F_z = 0$ . Cela donne une image intuitive du rotationnel: si dans le plan 2D il existe un point de rotation du champ, l'axe du rotation est perpendiculaire au plan.

Dans les cas où  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ , on dit que le champ  $\vec{F}$  est *irrotationnel*.

## Laplacien

### Définition 3.10. Laplacien d'un champ scalaire

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un champ scalaire. Le laplacien de  $f$  est une fonction scalaire notée

$\Delta f$  (ou parfois  $\vec{\nabla}^2 f$ ) définie par :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , cela donne explicitement :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Le **laplacien scalaire** mesure la différence entre la valeur de  $f$  en un point et la moyenne de ses valeurs dans un voisinage immédiat. Il est utilisé dans de nombreuses équations aux dérivées partielles (EDP) telles que l'équation de la chaleur, l'équation de Poisson ou celle de Laplace.

### Définition 3.11. Laplacien d'un champ vectoriel

Soit  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ vectoriel. Le laplacien de  $\vec{F}$  est défini composante par composante :

$$\Delta \vec{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n),$$

où chaque composante est elle-même un laplacien scalaire :

$$\Delta F_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j^2}.$$

Le **laplacien vectoriel** apparaît notamment dans les équations d'évolution des champs vectoriels comme en électrodynamique (équation de Maxwell pour le champ électrique ou magnétique), en mécanique des fluides, ou dans les modèles de diffusion vectorielle.

Une autre expression utile du laplacien vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$  est donnée par l'identité vectorielle :

$$\Delta \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}).$$

### Identités vectorielles fondamentales

Voici quelques identités vectorielles classiques reliant les opérateurs différentiels. Les propriétés avec un (\*) sont à mémoriser, alors que les autres sont souvent fournis dans les exams.

- (\*) Le rotationnel d'un gradient est toujours nul :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}. \quad (\text{a})$$

- (\*) La divergence d'un rotationnel est toujours nulle :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (\text{b})$$

- (\*) La divergence du gradient d'un champ scalaire est égale à son laplacien :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f. \quad (\text{c})$$

- Le rotationnel du rotationnel peut s'écrire comme :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}. \quad (\text{d})$$

- (\*) Le gradient d'un produit scalaire de fonctions scalaires :

$$\vec{\nabla}(fg) = f \vec{\nabla}g + g \vec{\nabla}f. \quad (\text{e})$$

- (\*) La divergence d'un produit d'un scalaire et d'un vecteur :

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla}f \cdot \vec{F}. \quad (\text{f})$$

- (\*) Le rotationnel d'un produit d'un scalaire et d'un vecteur :

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \vec{\nabla}f \times \vec{F}. \quad (\text{g})$$

- Le gradient d'un produit scalaire de deux champs vectoriels (identité de Leibniz vectorielle) :

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (\text{h})$$

- Le rotationnel d'un produit vectoriel de deux champs vectoriels :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (\text{i})$$

Il faut remarquer que c'est simple de mémoriser les identités (e), (f) et (g) vu qu'ils viennent de la dérivée d'un produit.

**Exercice 3.3.** Démontrer toutes les formules des propriétés 3.3.

### Intégrale curviligne: cas champ scalaire

On a vu dans la première partie la notion des intégrales et comment ils peuvent nous aider à calculer des surfaces. Comme la figure 14 l'indique, on peut obtenir la surface sous la courbe en sommant des rectangles qui forment approximativement la courbe. Plus on rend la largeur des rectangles fine, plus notre approximation est bonne. Dans la limite où la largeur tend vers 0, on obtient une expression exact de la surface sous la courbe.

Maintenant, on aimerait généraliser cette notion en calculant des aires sous des courbes dans un espace 3D et pas juste 2D. Prenons l'exemple où l'on a une fonction  $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  qui jouerait le rôle du toit de la maison ( $S_f$ ). On aimerait construire un mur en bois allant de  $A = (-1, 0)$  à  $B = (1, 1)$  comme indiqué dans la figure 20. Ce serait quoi la surface de bois dont on aurait besoin?

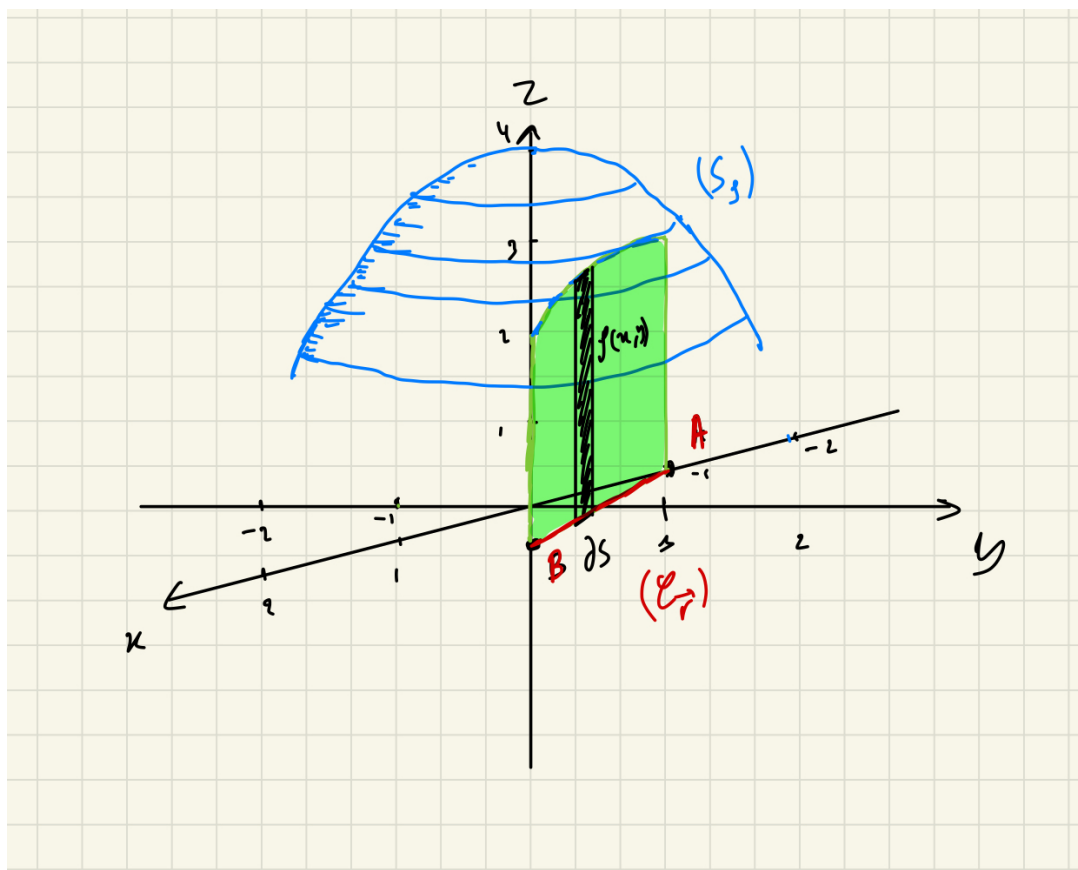


Figure 20: Calcul d'une aire avec les intégrales curvilignes.

On commence par modéliser la **base** du mur qui est le **segment** allant de  $(-1, 0)$  à  $(1, 1)$  par une courbe paramétrée. Pour la paramétrisation, comme il y en a une infinité, on pourrait choisir une seule. On va voir après que le choix de paramétrisation n'influence pas le calcul de la surface. Soit  $\vec{r}(t)$  le vecteur position de la base du mur, et choisissons que à  $t = 0$  on a  $\vec{r}(t = 0) = (-1, 0)$ , et à  $t = 1$  on a  $\vec{r}(t = 1) = (1, 1)$ . On pourrait traiter chaque composante comme une fonction de  $t$ :  $x(t)$  et  $y(t)$  qu'on pourrait les prendre linéaire, i.e. sous la forme  $a * t + b$ . On obtient donc  $\vec{r}(t) = (\frac{t-1}{2}, t)$ <sup>2</sup>. Pour chaque point  $\vec{r} = (x, y)$  est associée une hauteur  $z = f(\vec{r}) = f(x, y)$ . Comme on aimerait rester uniquement sur la **base** du mur, ce qui est assuré par la paramétrisation  $\vec{r}$ , on aura  $f \circ \vec{r} : t \mapsto f(\vec{r}(t))$  décrit la hauteur associée au mur. La surface du mur maintenant va être la somme de planches fines de hauteur  $f(\vec{r})$  et de largeur  $ds = \|d\vec{r}\|$ . La surface n'est donc que l'intégrale de  $f \circ \vec{r}$  sur  $[0, 1]$ , et on sait bien intégrer des fonctions de vers . La surface du

<sup>2</sup>On pourrait remarque que la paramétrisation  $\vec{r}(t) = (\frac{t^2-1}{2}, t^2)$  ou généralement  $\vec{r}(t) = (\frac{t^n-1}{2}, t^n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  marchent aussi.

mur est

$$\begin{aligned}
 S &= \int_A^B f(\vec{r}) \|d\vec{r}\| = \int_0^1 f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt \\
 &= \int_0^1 [4 - x(t)^2 - y(t)^2] \sqrt{\frac{5}{4}} dt \\
 &= \sqrt{\frac{5}{4}} \int_0^1 4 - \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - t^2 dt \\
 &= \sqrt{\frac{5}{4}} \int_0^1 \left(\frac{15}{4} + \frac{t}{2} - \frac{5t^2}{4}\right) dt \\
 &= \sqrt{\frac{5}{4}} \left[ \frac{15}{4}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{12}t^3 \right]_0^1 \\
 &= \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \frac{43}{12}
 \end{aligned}$$

La première partie montre que la surface est indépendante de la paramétrisation, ce qui devrait être le cas. Si l'on suppose que  $\vec{r}(t)$  encode la vitesse dont on peint le mur de  $A$  à  $B$ , il faut en fin de compte peindre la même surface quelque soit la vitesse (et l'expérience) du peintre. S'il y a rebroussement, c.-à-d. que vous avez repeint une partie, c'est que le problème vient de votre paramétrisation, car par définition elle devrait être bijective!

Le calcul de cette surface ne se restreint pas à une courbe linéaire, mais peut être facilement généralisé à une courbe quelconque, d'où vient le pouvoir des intégrales de ligne. On peut appliquer le même raisonnement d'empiler des plaques fines tout au long de la courbe  $\vec{r}(t)$  dont leur largeur est  $\|d\vec{r}\|$  et leurs hauteurs sont définies par  $f \circ \vec{r}$  où  $f$  est une fonction scalaire composée par la courbe  $\vec{r}$ .

**Définition 3.12.** Soit une courbe  $\mathcal{C}$  dans l'espace, paramétrée par une fonction vectorielle  $\vec{r} : \rightarrow^n$  avec  $t \in [a, b]$ .

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction scalaire continue. L'intégrale de  $f$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  est définie par :

$$\int_{\mathcal{C}} f(\vec{r}) \|d\vec{r}\| = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt \quad (8)$$

Bien entendu, la notion de l'intégrale curviligne peut être étendue à n'importe quelle dimension pour calculer l'aire d'une surface. Le cas  $n = 1$  correspond dans le plan, et le cas  $n = 2$  correspond à l'espace 3D, vu que la valeur  $f(x, y)$  joue le rôle de  $z$ . N'essayez pas de l'imaginer pour  $n \geq 3$  sauf si vous pouvez imaginer des tesseracts.

**Exercice 3.4.** Reprenons l'exemple de la fonction scalaire  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  qui représente notre toit. On aimerait bâtir un mur circulaire de rayon 1 et de centre  $O = (0, 0)$  comme indiqué dans la figure 21. Quelle serait la surface du mur?

Paramétrons le cercle par  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

Alors :

$$f(\vec{r}(t)) = 4 - \cos^2 t - \sin^2 t = 4 - 1 = 3 \quad \text{et} \quad \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3 \cdot 1 dt = 3 \cdot \int_0^{2\pi} dt = 3 \cdot 2\pi = 6\pi \end{aligned}$$

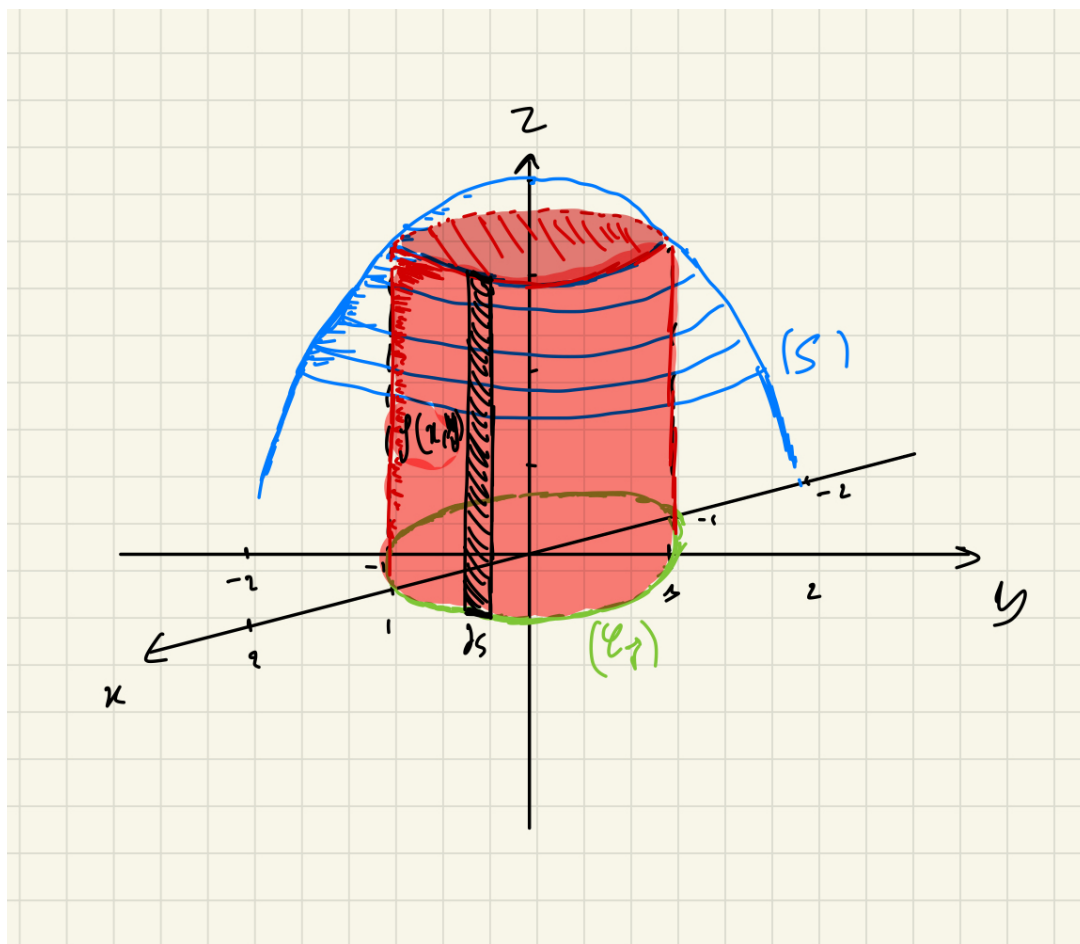


Figure 21: Calcul d'une aire avec les intégrales curvilignes.

### Intégrale curviligne: cas champ vectoriel

On a vu le cas de l'intégrale curviligne appliquée à un champ scalaire. On pourrait bien l'étendre à une fonction vectorielle en calculant l'intégrale curviligne pour chaque composante. Si par exemple on a la fonction vectorielle  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , la quantité

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \|d\vec{r}\|$$

est un vecteur dans  $\mathbb{R}^2$ , et franchement ça n'a pas beaucoup de sens dans la physique. Ce qu'on pourrait faire, c'est créer une intégrale scalaire, c.à-d. dans  $\mathbb{R}$ . Pour cela on se sert du produit scalaire qu'on va l'appliquer entre  $\vec{F}$  et  $d\vec{r}$ .

**Définition 3.13.** Soit une courbe  $\mathcal{C}$  dans l'espace, paramétrée par une fonction vectorielle  $\vec{r} : \rightarrow^n$  avec  $t \in [a, b]$ .

Soit  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction vectorielle continue (c.-à-d. chacune de ses composantes  $F_i$  sont continues). L'intégrale de  $\vec{F}$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  est définie par :

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (9)$$

Une quantité importante dans la mécanique classique qu'on calcule grâce à l'intégrale curviligne d'un champ vectoriel est le **travail**  $W$  (vient du *Work* en anglais). Imaginons qu'une particule poursuit un trajet  $\vec{r}(t)$  suite à une action d'un champ de force  $\vec{F}(\vec{r})$ . Une quantité de travail infinitésimale  $\delta W$  est définie comme :

$$\delta W(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

Pour calculer le travail total de la force  $\vec{F}$  d'un point de départ  $A$  à un point d'arrivée  $B$ , il suffit de prendre l'intégrale (ce qui revient à sommer toutes les quantités infinitésimales du travail), c.-à-d. :

$$W = \int \delta W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

où l'on a introduit une paramétrisation  $\vec{r}(t)$  de la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 3.5.** Une luge glisse d'un point  $A = (0, h)$  à un point  $B = (d, 0)$  sur une pente droite, inclinée sans frottement, sous l'effet de la gravité  $\vec{P} = (0, -mg)$ . On suppose que la luge suit la trajectoire en ligne droite entre  $A$  et  $B$ .

1. Calculer le travail de la force de gravité entre  $A$  et  $B$ .
2. Supposons maintenant qu'une force de frottement constante  $\vec{f} = (-\mu, 0)$  s'ajoute, opposée au mouvement horizontal. Calculer le travail de cette force entre  $A$  et  $B$ .

**Solution:**

1. Le vecteur déplacement est  $\vec{AB} = (d, -h)$ . Le travail de la gravité est :

$$W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \vec{AB} = (0, -mg) \cdot (d, -h) = mgh$$

2. Le travail de la force de frottement  $\vec{f} = (-\mu, 0)$  le long de  $\vec{AB}$  est :

$$W_{\vec{f}} = \vec{f} \cdot \vec{AB} = (-\mu, 0) \cdot (d, -h) = -\mu d$$

**Champs vectoriels conservateurs**

**Définition 3.14.** On dit qu'un champ de vecteurs  $\vec{F}$  est **conservateur** s'il existe une fonction réelle  $f$ , appelée **potentiel scalaire**, telle que :

- En dimension 2 ( $\vec{F}(x, y)$ ), on a :

$$\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

- En dimension 3 ( $\vec{F}(x, y, z)$ ), on a :

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Cela signifie que le champ  $\vec{F}$  est le **gradient** d'une fonction : ses vecteurs pointent dans la direction où la fonction  $f$  augmente le plus vite.

Si un champ de vecteurs  $\vec{F}$  est conservateur, alors :

- Le travail de  $\vec{F}$  entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend que des points eux-mêmes, pas du chemin suivi :

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

- Le travail sur un **chemin fermé** (c'est-à-dire qui revient à son point de départ) est nul :

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Ce résultat est en fait une généralisation d'une formule très connue en analyse, valable en une dimension :

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$$

Autrement dit, si on connaît la dérivée d'une fonction réelle  $f(x)$ , alors l'intégrale de cette dérivée entre  $a$  et  $b$  nous donne simplement la différence de  $f$  entre les deux points. Eh bien, dans le cas d'un champ vectoriel conservateur  $\vec{F} = \nabla f$ , c'est exactement la même idée, sauf qu'on travaille avec une fonction  $f(x, y)$  ou  $f(x, y, z)$ , et l'intégrale se fait le long d'un chemin dans l'espace. Le travail total revient toujours à calculer  $f(B) - f(A)$  : c'est la variation du potentiel.

Le symbole  $\oint$  (intégrale avec un cercle) indique que l'intégrale est prise le long d'un **chemin fermé** (c.a.d  $A$  et  $B$  sont le même point).

**Exemples :**

- En dimension 2, le champ de gravité uniforme  $\vec{F}(x, y) = (0, -mg)$  est conservateur avec potentiel  $f(x, y) = mgy$
- En dimension 3, le champ  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  est conservateur avec potentiel  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$
- Une force de frottement constante  $\vec{F}(x, y) = (-\mu, 0)$  n'est **pas** conservatrice : le travail dépend du chemin

### 3.4 Théorèmes d'intégration du calcul vectoriel

#### Théorème de Green (plan $\mathbb{R}^2$ )

Avant d'énoncer le théorème de Green, introduisons quelques notions géométriques importantes :

- Un **domaine**  $D$  du plan  $\mathbb{R}^2$  est une région "pleine" délimitée par une courbe fermée. Par exemple, un disque, un rectangle ou une forme quelconque sans "trou" à l'intérieur.
- La **frontière**  $\partial D$  de ce domaine est la courbe qui entoure  $D$ . Elle doit être suffisamment régulière (continue, sans "saut").
- On dit que la frontière est **orientée positivement** si on la parcourt dans le sens trigonométrique (anti-horaire), c'est-à-dire de manière à toujours garder le domaine  $D$  sur sa gauche pendant le parcours.
- Un domaine est dit **simplement connexe** s'il n'a pas de "trou". Cela signifie que toute boucle tracée à l'intérieur peut être continuellement contractée en un point sans sortir du domaine. Par exemple, un disque est simplement connexe, mais un anneau ne l'est pas.

Avec ces notions en tête, nous pouvons énoncer le théorème de Green, qui relie une intégrale curviligne autour de  $\partial D$  à une intégrale double sur tout le domaine  $D$  :

**Définition 3.15.** Soit  $D$  un domaine du plan  $\mathbb{R}^2$  régulier à frontière  $\partial D$  orientée positivement (sens trigonométrique). Soit  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$  et  $\partial D$ . Alors,

$$\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

La circulation du champ  $\vec{F}$  le long du bord  $\partial D$  est égale à la somme des rotations infinitésimales (la composante  $z$  du rotationnel) à l'intérieur de  $D$ .

Il existe également une version du théorème de Green exprimant un flux à travers une courbe fermée, mais celle-ci se généralise plus naturellement par le théorème de la divergence en dimension 3.

#### Théorème de Stokes (espace $\mathbb{R}^3$ )

**Définition 3.16.** Soit  $S$  une surface orientée dans  $\mathbb{R}^3$  bordée par une courbe fermée  $\partial S$  orientée positivement par rapport à la normale à  $S$ . Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $S$ . Alors,

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

où  $d\vec{r}$  est l'élément infinitésimal de courbe et  $d\vec{S}$  est l'élément orienté de surface.

La circulation du champ  $\vec{F}$  autour du bord  $\partial S$  est égale au flux du rotationnel de  $\vec{F}$  à travers la surface  $S$ .

Le théorème de Green est un cas particulier du théorème de Stokes lorsque la surface est plane.

### Théorème de la divergence (Gauss-Ostrogradski)

**Définition 3.17.** Soit  $V$  un volume de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à frontière lisse  $\partial V$  orientée vers l'extérieur. Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel de classe  $C^1$  sur  $V$ . Alors,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

où  $dV$  est l'élément de volume, et  $d\vec{S}$  l'élément de surface orienté vers l'extérieur.

Le flux total du champ  $\vec{F}$  à travers la frontière  $\partial V$  est égal à l'intégrale sur le volume de la divergence de  $\vec{F}$ .

La quantité de champ qui "sort" d'un volume est égale à la somme des sources internes présentes dans le volume.

### Résumé

Théorème	Domaine	Intégrale sur...	Fonction à intégrer	Type de bord
Green	plan $\mathbb{R}^2$	$\partial D \leftrightarrow D$	$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$	surface plane
Stokes	espace $\mathbb{R}^3$	$\partial S \leftrightarrow S$	$\nabla \times \vec{F}$	surface orientée
Divergence	espace $\mathbb{R}^3$	$\partial V \leftrightarrow V$	$\nabla \cdot \vec{F}$	volume orienté

**Note 3.5.** Tous ces théorèmes relient une propriété locale (rotationnel ou divergence) à une propriété globale (circulation ou flux) sur le bord du domaine.

## 3.5 Développement limité

En physique, on est souvent contraint à faire des approximations dans des cas qui nous intéressent car l'expression exacte est difficile à gérer (difficile à dériver ou à intégrer par exemple). Dans cette partie du cours nous introduisons la notion du développement limité et nous l'appliquerons à des fonctions usuelles.

### Définition et propriétés

Le développement limité (DL) consiste à approximer des fonctions avec des polynômes. On notera par  $DL_n(a)$  le DL d'une fonction au point  $a \in \mathbb{R}$  à l'ordre  $n$ .

**Définition 3.18.** Soit  $f : \rightarrow$  une fonction réelle. On dit que  $f$  admet un  $DL_n(a)$  s'il existe  $a_0, a_1, \dots, a_n \in$  tels que

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + \varepsilon_n(h),$$

où  $\varepsilon_n$  est une fonction définie sur un voisinage de  $a$  qui vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_n(h)/h^n = 0. \quad (10)$$

Il faut aussi commenter sur la fonction  $\varepsilon_n$ . Cette fonction contrôle la précision pour laquelle la fonction  $f$  est approchée par le polynôme  $P(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$ . On pourrait reformuler la définition en disant que la condition nécessaire pour laquelle un  $DL_n(a)$  existe pour  $f$  est l'existence de  $a_0, \dots, a_n$  tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n)}{h^n} = 0 \quad (11)$$

La définition qu'on vient de donner est valable pour n'importe quelle fonction  $f : \rightarrow$ . Le problème est qu'elle ne nous ne donne pas des formules pour les  $a_0, \dots, a_n$  et nous aurons besoin de ces expressions pour calculer des quantités en physique. On remarque dans l'équation 11 si l'on prend le cas  $n = 1$ ,  $a_1$  doit être la dérivée de  $f$  en  $a$ , c.-à-d.  $f'(a)$ . Mais cela n'est valable que si  $f$  est dérivable en  $a$ .

Heureusement en physique on suppose quasi-toujours que les fonctions sont infiniment dérivables. Donc si l'on a des fonctions dérivables et leurs dérivées sont continues, les  $a_i$  sont uniques et on connaît bien leur expression.

**Définition 3.19.** Développement de Taylor

Soit  $f : \rightarrow$  une fonction de classe  $C^n$  ( $n$  fois dérivables et ses dérivées sont continues).

Alors  $f$  admet un  $DL_n(a)$  défini par

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f^{(2)}(a)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \varepsilon_n(h), \quad (12)$$

où  $\varepsilon_n$  est une fonction définie sur un voisinage de  $a$  qui vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_n(h)/h^n = 0.$$

Maintenant, on sait que  $a_i = \frac{f^{(i)}}{i!}$  et on sait bien dériver des fonctions  $i$ -fois.

En retournant à  $\varepsilon_n(h)$ . En physique, on s'intéresse pas souvent à ce terme. Quand on vous dirait d'écrire un  $DL_n(a)$  d'une fonction  $f$ , il suffirait d'écrire

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f^{(2)}(a)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n,$$

avec le symbole  $\approx$ , où  $h$  est proche de 0. Pour noter que  $h$  est proche de 0, on utilise la notation  $h \ll 1$ .

## Fonctions usuelles

Dans cette section on verra les  $DL(0)$  de certains fonctions usuelles. Autrement dit, ce sont les expressions des fonctions usuelles dans la limite  $x \ll 1$ .

### Fonctions trigonométriques

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\tan x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$$

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

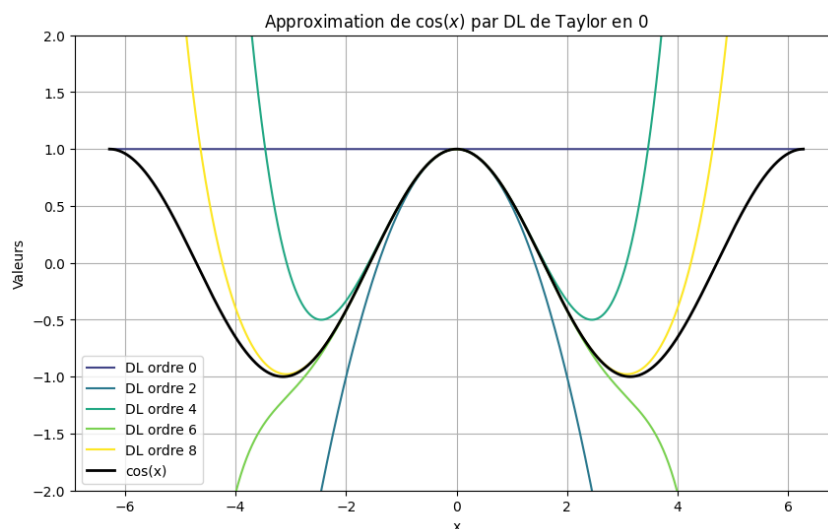


Figure 22:  $DL(0)$  de la fonction cosinus

### Fonctions exponentielle et logarithmique

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

### Fonctions hyperboliques

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \approx x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

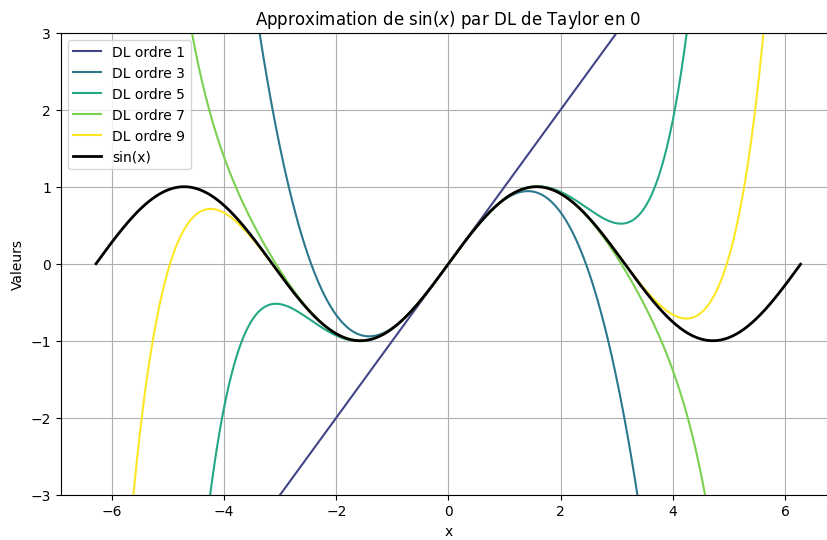


Figure 23: DL(0) de la fonction sinus

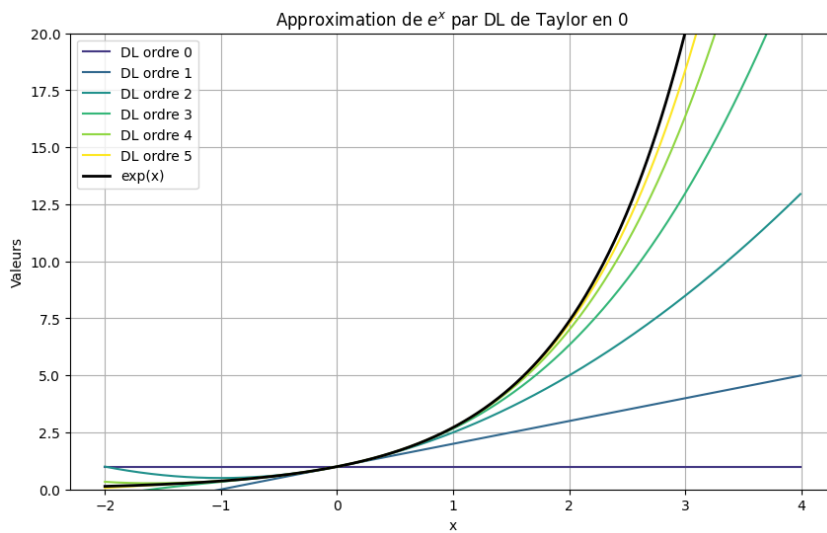


Figure 24: DL(0) de la fonction exponentielle

## Fonction algébriques

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

Les figures 22, 23, 24 montrent le DL des fonctions cos, sin et exp respectivement. On remarque que plus qu'on ajoute un terme au DL, plus on approxime bien la fonction aux alentours de 0. Ce voisinage est contrôlé par l'ordre de l'expansion de Taylor. Plus l'ordre de DL est élevé, plus on s'autorise à s'éloigner un peu de 0.

## Propriétés

On élaborera dans cette section les propriétés des opérations sur les fonctions en utilisant leur DL. Si  $f \rightarrow$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ , on notera  $P_{a,n}(h)$  son approximation polynomiale avec le DL Taylor défini dans l'équation 12. Ce DL dépendra du point  $a$  où l'on applique le DL, ainsi bien que l'ordre  $n$ . C'est facile de remarquer que pour obtenir le  $DL_k(a)$  en  $k < n$ , il suffit de 'tronquer'  $P_{a,n}(h)$ , jusqu'à l'ordre  $k$ , c.-à-d. on élimine toutes les puissances  $> k$  de  $P_{a,n}(h)$  pour obtenir  $P_{a,k}(h)$ .

### Addition de DL

Soient  $f, g \rightarrow$  2 fonctions réelles et  $P_{a,n}(h)$  et  $Q_{a,n}(h)$  leurs  $DL_n(a)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors le  $DL_n(a)$  de  $f + \lambda g$  est

$$f(a+h) + \lambda g(a+h) \approx P_{a,n}(h) + \lambda Q_{a,n}(h).$$

### Produit de DL

Soient  $f, g \rightarrow$  2 fonctions réelles et  $P_{a,n}(h)$  et  $Q_{a,n}(h)$  leurs  $DL_n(a)$ . Alors le  $DL_n(a)$  de  $fg$  est

$$f(a+h)g(a+h) \approx R_{a,n}(h),$$

où  $R_{a,n}(h)$  est le produit  $P_{a,n}(h) \times Q_{a,n}(h)$  tronqué à l'ordre  $n$ .

### Composition de DL

Soient  $f, g \rightarrow$  2 fonctions réelles et  $P_{g(a),n}(h)$  et  $Q_{a,n}(h)$  leurs  $DL_n(g(a))$  et  $DL_n(a)$  respectivement. Alors le  $DL_n(a)$  de  $f \circ g$  est

$$f(g(a+h)) \approx S_{a,n}(h),$$

où  $S_{a,n}(h)$  est la composition  $P_{g(a),n}(Q_{a,n}(h))$  tronqué à l'ordre  $n$ .

## Applications

### Exercice 3.6. Approximation en mécanique : le pendule simple

L'équation horaire d'un pendule simple de longueur  $l$  et d'angle  $\theta(t)$  avec la verticale est :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0.$$

(1) Écrire l'équation approximée du mouvement pour les petites oscillations.

(2) Quelle est alors la nature du mouvement et la période d'oscillation  $T$  ?

Pour petits angles ( $\theta \rightarrow 0$  en radians), on utilise :

$$\sin \theta \approx \theta.$$

L'équation devient :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0,$$

qui est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

La période est donc :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

### Exercice 3.7. Approximation de l'énergie relativiste

L'énergie totale d'une particule relativiste de masse  $m$  et de vitesse  $v$  est :

$$E = \gamma mc^2, \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

(1) Développer  $E$  à l'ordre 2 en  $v/c \ll 1$ .

(2) Interpréter physiquement les deux premiers termes obtenus.

On développe  $\gamma$  pour  $v/c \ll 1$  :

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2), \quad \text{avec} \quad x = \frac{v^2}{c^2}.$$

Ainsi :

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2.$$

D'où :

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}.$$

Le premier terme  $mc^2$  est l'énergie de masse au repos. Le second terme  $\frac{1}{2}mv^2$  est l'énergie cinétique classique. Le troisième est une correction relativiste d'ordre supérieur.

**Exercice 3.8. Champ électrique d'une charge hors de l'axe**

Une charge  $q$  est placée en  $O$  et on considère un point  $M$  de coordonnées  $(d, y)$  avec  $d \gg y$ . Le champ électrique en  $M$  est :

$$E(y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(d^2 + y^2)}.$$

(1) Donner un développement limité de  $E(y)$  en  $y = 0$  à l'ordre 2.

(2) À quelle condition physique correspond cette approximation ?

On factorise :

$$E(y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{d}\right)^2}.$$

Puis, développement limité :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2), \quad \text{avec } x = \left(\frac{y}{d}\right)^2.$$

On trouve :

$$E(y) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(1 - \frac{y^2}{d^2}\right).$$

L'approximation est valable lorsque  $y \ll d$ , c'est-à-dire proche de l'axe.

## 4 Calcul intégral Géométrie

### 4.1 Calcul Intégral

#### Calcul de primitives

**Définition 4.1.** L'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Si  $f$ , fonction continue sur le segment  $[a, b]$ , est la fonction dérivée de la fonction  $F$ , alors  $F$  est dite la primitive de  $f$ , et on définit l'intégrale de la fonction  $f$  par :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Et dans la suite, on utilisera la notation :  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Notons que la primitive n'est pas unique, tant que la dérivée d'une constante est 0. Donc si  $F$  est la primitive d'une fonction continue sur  $[a, b]$   $f$ , alors  $F + c$  est aussi primitive de  $f$  pour tout  $c \in \mathbb{R}$ . On a donc une infinité de primitives pour toute fonction continue sur un segment. Ainsi, on voit que le calcul intégral repose nécessairement sur le calcul des primitives.

Fonction	Primitive
$\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\alpha x + C$
$x^r$ ( $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$
$\sin(ax + b)$	$\frac{-1}{a} \cos(ax + b) + C$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \cdot \arctan(x) + C$
$u' + v'$	$u + v + C$
$\alpha u'$	$\alpha u + C$
$u'u^r$ ( $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u) + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$
$e^x$	$e^x + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$f' \circ g \times g'$	$f \circ g + C$

Table 2: Tableau des primitives

Notons que  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

**Théorème 4.1.** Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$  c'est-à-dire  $\int_a^b f(x)dx$  existe et finie.

**Théorème 4.2.** Soient  $f, g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ , et  $a, b, c$  trois éléments de  $I$ . Soit  $\alpha$  un réel, on a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$  (Relation de Chasles)

**Définition 4.2.** Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  symétrique par rapport à 0,  $I = [-a, a]$  où  $a$  est réel, est dite :

- paire si  $\forall x \in I, f(x) = f(-x)$ .
- impaire si  $\forall x \in I, f(x) = -f(-x)$ .

**Théorème 4.3.** Soit  $f$  continue sur  $[-a, a]$  avec  $a$  réel.

- Si  $f$  est paire, alors  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ .
- Si  $f$  est impaire, alors  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

**Définition 4.3.** Soit  $f$  fonction continue définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est une fonction périodique de période  $T$  si  $\forall x \in I, f(x + T) = f(x)$  si  $x + T$  reste dans l'intervalle de définition de  $f$ .

**Théorème 4.4.** Soit  $f$  une fonction périodique de période  $T$ , continue sur  $I$ , soit  $a, b$  dans  $I$  tel que  $a + T, b + T$  soient aussi dans  $I$ , on a :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

**Théorème 4.5.** Soit  $A = \int_r^d \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ , et  $\Delta = b^2 - 4ac$ , le discriminant du polynôme au dénominateur.

- Si  $\Delta > 0$ , soit  $x_1, x_2$  tel que  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , alors  $\exists \alpha, \beta$  tel que :

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2}$$

On utilise le tableau de primitives usuelles, il s'agit d'une fonction logarithmique.

- Si  $\Delta = 0$ , soit  $x_0$  tel que  $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ , alors on peut écrire :

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - x_0)^2}$$

On utilise le tableau de primitives usuelles, il s'agit d'une primitive en  $\frac{-1}{a(x-x_0)}$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors on fait un changement de variable  $u = x + \frac{b}{2a}$ , on a alors :

$$A = \int_r^d \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \quad (13)$$

$$= \int_{r'}^{d'} \frac{du}{au^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)} \quad (14)$$

$$= \frac{4a}{4ac - b^2} \int_{r'}^{d'} \frac{du}{\frac{4a^2}{4ac - b^2} u^2 + 1} \quad (15)$$

avec  $d' = d + \frac{b}{2a}$  et  $r' = r + \frac{b}{2a}$ . On effectue de nouveau le changement  $t = \frac{2a}{\sqrt{4ac - b^2}} u$ , et on retrouve la forme  $\frac{1}{1+t^2}$  dont arctan est une primitive.

## Intégration et ordre

**Théorème 4.6.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a < b$ . Si  $f \geq g$  sur  $[a, b]$ , alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

**Théorème 4.7.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . On a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Théorème 4.8.** Soit  $f, g$  des fonctions continues sur le segment  $[a, b]$ , on a :

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right) \quad (16)$$

Cette inégalité est appelée **inégalité de Cauchy-Schwarz**.

## Techniques d'intégration

Quand on est amené à calculer l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  et que  $f$  n'a pas la forme d'une primitive usuelle, alors il existe des techniques d'intégration qui ramènent les calculs à des

cas usuels. On verra dans cette section deux méthodes très puissantes : l'intégration par partie et le changement de variables.

### Intégration par parties

L'intégration par parties repose sur le principe de dérivée de produit. Si  $u, v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , on a  $(uv)' = u'v + uv'$ . Alors, si on arrive à exprimer la fonction à dériver sous la forme  $u'v$ , et que l'intégrale de  $uv'$  est plus simple que la première, on est alors sauvé !

**Théorème 4.9.** Soient  $u, v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$  et soient  $a$  et  $b$  deux éléments de l'intervalle  $I$  on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

**Exercice 4.1.** Calculez les intégrales suivantes :

- $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)dx$
- $B = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}$
- $C = \int_e^{e^2} \ln(x)dx$
- $D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos(x)$
- $E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin(x)$

Indication : Utiliser l'intégration par parties et la propriété 4.3.

### Changement de variable

**Théorème 4.10.** Soient  $g$  une fonction dérivable sur  $[a, b]$  tel que  $g'$  continue sur  $[a, b]$ , et  $f$  une fonction continue sur  $g([a, b])$ , on a :

$$\int_a^b f' \circ g(x) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Cette propriété est appelé changement de variable en posant la nouvelle variable  $u = g(x)$ .

**Exercice 4.2.** Démontrez la proposition 4.3, et la proposition 4.4, en utilisant la relation de Chasles et le changement de variable.

## Les intégrales en physique

**Exercice 4.3.** Un corps noir est un objet qui absorbe toute la lumière incidente, sans en réfléchir ni en transmettre. En conséquence, un corps noir idéal est aussi un émetteur parfait : à l'équilibre thermique, il émet un rayonnement qui dépend de sa température  $T$  et de la fréquence de la lumière émise  $\nu$ . L'énergie émise par un corps noir par unité de surface, de temps, et de fréquence est donné par :

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

avec :

- $h$  appelée constante de Planck.
- $c$  vitesse de la lumière.
- $k_B$  appelée constante de Boltzman.

En intégrant sur  $d\nu$ , on trouve  $P(T)$  le flux énergétique total, on a :

$$P(T) = \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu$$

**Remarque :** Une borne d'intégration infinie, veut dire que lorsqu'on trouvera la primitive, on prendra sa limite à l'infini.

Une loi bien connue en physique appelée loi de Stefan-Boltzman est que  $P(T) = \sigma T^4$  où  $\sigma$  est une constante. On se propose de montrer cette loi en utilisant la technique de changement de variable en intégration.

**Question -1** Sachant qu'en physique, les fonctions tel que  $\ln$  ou  $\exp$  entrent sur des variables sans dimension physique, proposez dans cet exercice un changement de variable  $x$  adimensionnée.

**Question -2** Effectuez le changement de variable et montrez que

$$P(T) = \frac{2h}{c^2} \left( \frac{k_B T}{h} \right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\text{Sans dimension}}$$

On voit alors la puissance de la technique de changement de variable en physique, elle permet de séparer les paramètres physiques, des constantes sans dimension, et permet donc de déduire facilement les lois physiques.

**Question -3** Sachant que  $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ , exprimez  $\sigma$  de la loi de Stefan Boltzman en fonction des données du problème.

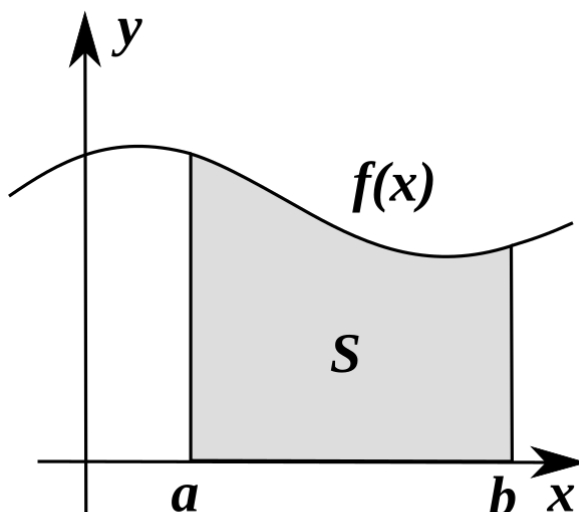
## Interprétation géométrique des intégrales

**Définition 4.4.** Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ , soit  $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$  une subdivision de  $[a, b]$ , et soit  $\xi_1, \dots, \xi_n$  des réels tels que, pour chaque  $i$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . La somme de Riemann de  $f$  associée à  $\sigma$  et

aux  $\xi_i$  est définie par

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

On considère la surface  $S$  en dessous de la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  dans un repère orthonormé, délimité par la droite  $(D_1) : x = a$  et la droite  $(D_2) : x = b$  et l'axe des abscisses, comme illustré dans la figure ci-dessous. On se propose de lier cette surface  $S$  à une somme de Riemann de  $f$  adapté à une subdivision choisie.



On découpe le segment  $[a, b]$  en  $n$  petits morceaux pour construire des rectangles s'appuyant sur chaque portion de segment ainsi que sur la courbe  $f$  comme illustré sur la figure 25. On considère une subdivision  $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$  telle que  $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$ , tous les rectangles sont donc de même largeur  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ , et pour la longueur on prend  $f(x_k)$  ou  $f(x_{k+1})$  [On prend  $\max(f(x_k), f(x_{k+1}))$  pour les rectangles couleur claire dans la figure 25, et  $\min(f(x_k), f(x_{k+1}))$  pour les rectangles oranges. On retrouve alors la somme de Riemann  $S(f, \sigma, \sigma) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{b-a}{n} f(a + \frac{b-a}{n}k)}_{\text{surface d'un rectangle}}$ .

Et on peut voir que pour  $n$  très grand, rigoureusement quand on fait la limite de la somme de Riemann, on retrouve exactement la surface  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + \frac{b-a}{n}k)$

**Théorème 4.11.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , on peut définir l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  par une limite de somme de Riemann:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + \frac{b-a}{n}k)$$

Ainsi, on arrive à ce que l'intégrale  $|\int_a^b f(x)dx| = S$  est en vérité un calcul de la surface  $S$  en dessous de sa courbe  $\mathcal{C}_f$ . C'est ce qu'on appelle **interprétation géométrique de l'intégrale**.

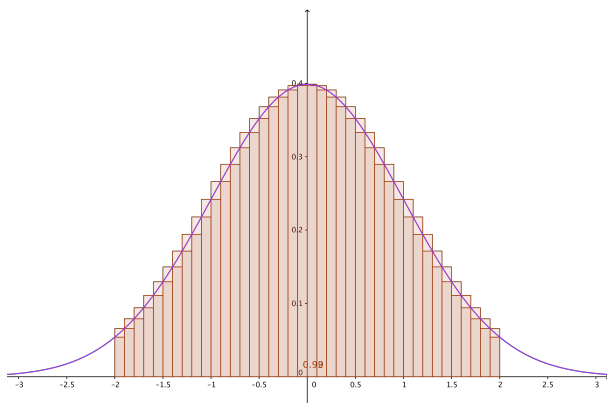


Figure 25: La surface en dessous de la courbe  $C_f$  est plus grande que la surface déterminée par les rectangles oranges, et plus petite que la surface déterminée par les rectangles couleur claire. A la limite, on retrouve l'égalité de la surface avec la limite de la somme de Riemann.

**Note 4.1.** La propriété 4.11 est pratique à la fois pour le calcul des intégrales quand la somme de Riemann est connue, ou pour le calcul des limites quand l'intégrale de la fonction  $f$  est facile à calculer.

On peut aussi comprendre des propriétés des intégrales à partir de cette interprétation géométrique. A titre d'exemple, on peut voir sur la figure 26, que l'intégrale  $\int_0^\pi \sin(2x) dx = 0$  est nulle à partir de la courbe, on retrouve deux surfaces égales, l'une en dessus de l'axe des abscisses, l'autre en dessous, donc leur somme s'annule. Il s'agit donc d'une sorte de démonstration géométrique du deuxième point de la proposition 4.3.

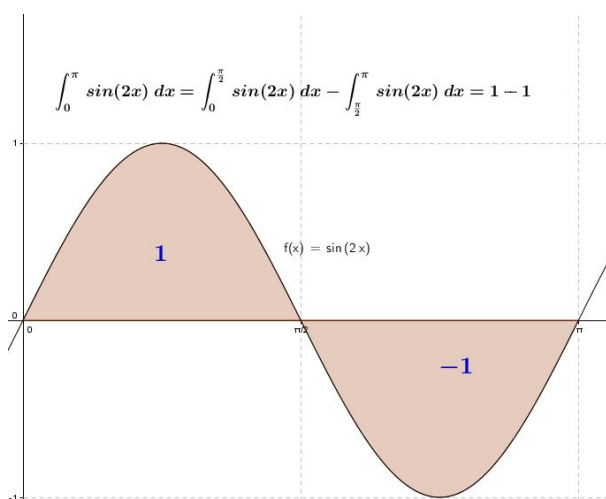


Figure 26: Intéprétation géométrique de l'intégrale

## 4.2 Géométrie

### Notion de coordonnées

Un système de coordonnées est un système mathématique qui permet de repérer la position d'un point dans un espace à l'aide de nombres, qu'on appelle *coordonnées*. Il existe plusieurs types de systèmes de coordonnées ; ici, nous présenterons trois repères : les coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques. Bien qu'un système physique puisse être décrit dans chacun de ces systèmes, le choix de l'un ou de l'autre dépend du contexte spécifique.

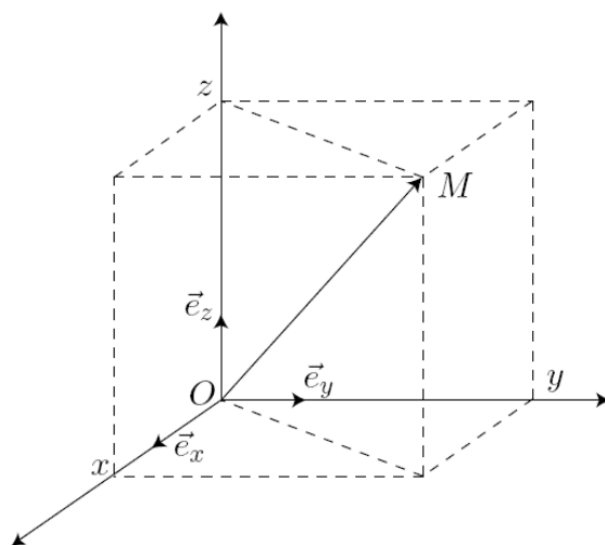
### Coordonnées cartésiennes

On considère le repère orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , c'est-à-dire que les trois vecteurs  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  sont orthogonaux et de norme 1, c'est-à-dire :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0,$$

et

$$\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1.$$



On considère le point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$ , et on écrit :

$$O\vec{M} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

En mécanique, l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , et la vitesse la dérivée du vecteur position par rapport au temps  $\vec{v} = \frac{dO\vec{M}}{dt}$ . La dérivation d'un vecteur repose sur le principe de dérivation du produit, ainsi :

$$\frac{d(x\vec{e}_x)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + x\frac{d\vec{e}_x}{dt} \quad (17)$$

En coordonnées cartésiennes, les axes sont fixes au cours du temps, ce qui rend le système de coordonnées cartésien le plus simple de tous les repères,  $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$ .

Pour simplifier, on utilise le symbole  $\dot{x}$  pour désigner  $\frac{dx}{dt}$ , de même pour  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ . Et  $\ddot{x}$  pour désigner la dérivée seconde  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , de même  $\ddot{y}$  et  $\ddot{z}$ . Et on a alors:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad (18)$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (19)$$

**Théorème 4.12.** On repère les surfaces élémentaires, par le vecteur normal perpendiculaire à l'élément de surface considéré.

$$\overrightarrow{d^2S_z} = dx dy \vec{e}_z \quad (20)$$

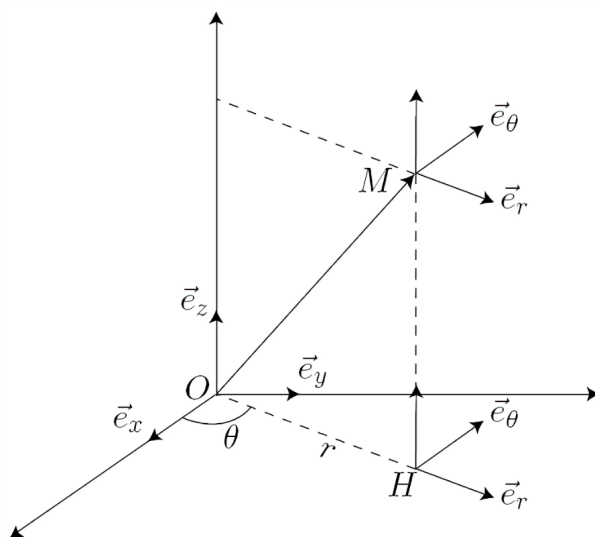
$$\overrightarrow{d^2S_y} = dx dz \vec{e}_y \quad (21)$$

$$\overrightarrow{d^2S_x} = dy dz \vec{e}_x \quad (22)$$

Et l'élément de volume est  $dV = dx dy dz$

### Coordonnées cylindriques

Comme son nom l'indique, ce sont les coordonnées adaptées à un cylindre, l'axe ( $Oz$ ) étant l'axe le long de la hauteur du cylindre, et à la base, on retrouve le plan ( $O, \vec{e}_x, \vec{e}_y$ ), qui est le même que le plan ( $O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ). Les coordonnées cylindriques consistent en une coordonnée radiale  $r$ , une coordonnée azimutale  $\theta$  et une coordonnée  $z$  de la hauteur.



Le point  $M$  est repéré tel que :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z = \vec{r} + z\vec{e}_z \quad (23)$$

**Théorème 4.13.** Comme le même vecteur  $\overrightarrow{OM}$  peut être repéré par les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ ,  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ , il est intéressant d'indiquer une correspondance entre les deux systèmes de coordonnées.

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad (24)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad z = z \quad (25)$$

La particularité avec le système de coordonnées cylindriques, c'est que  $\vec{e}_r$ , et  $\vec{e}_\theta$  sont des vecteurs tournants, et varient au cours du temps et nous avons :

$$\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \quad (26)$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \quad (27)$$

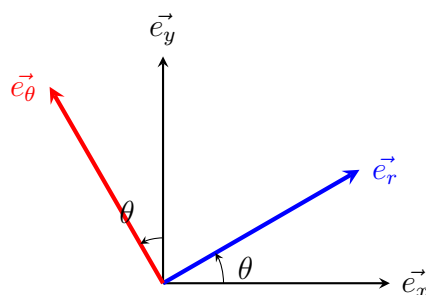


Figure 27: Figure plane du plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

**Exercice 4.4.** Montrer que :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (28)$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \quad (29)$$

La vitesse et l'accélération d'un objet au point  $M$  sont définies par :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \quad (30)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (31)$$

En physique, le système de coordonnées cylindriques est fréquemment utilisé dans les problèmes impliquant des interactions radiales, comme la force gravitationnelle ou l'interaction entre des charges électriques. Cela s'explique par le fait que ces forces dépendent de la distance radiale entre les objets, et la symétrie cylindrique de ce type de problème permet de simplifier les calculs et l'analyse des forces en utilisant ce système de coordonnées. Quand le mouvement est en deux dimensions, on parle de **coordonnées polaires**  $(r, \theta)$ .

**Théorème 4.14.** On repère les surfaces élémentaires, par le vecteur normal perpendiculaire à l'élément de surface considéré.

$$\overrightarrow{d^2S_r} = rd\theta dz \vec{e}_r \quad (32)$$

$$\overrightarrow{d^2S_\theta} = dr dz \vec{e}_\theta \quad (33)$$

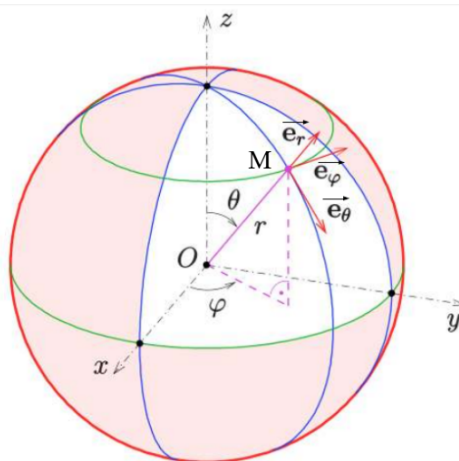
$$\overrightarrow{d^2S_z} = r dr d\theta \vec{e}_z \quad (34)$$

Et l'élément de volume est  $dV = r dr d\theta dz$

**Note 4.2.** Figurons que l'expression de la surface élémentaire de normale  $\vec{n}$  dépend des déplacements élémentaires dans le plan orthogonal à  $\vec{n}$ . Si on prend  $\vec{v} = r\vec{e}_r + r\theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z$ , et on prend juste la variation du vecteur  $\overrightarrow{dOM}$ , sans dériver par rapport au temps, on trouve  $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$ . Ainsi, pour tout déplacement du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , on a un déplacement  $dr$  selon le vecteur  $\vec{e}_r$ , un déplacement  $rd\theta$  selon le vecteur  $\vec{e}_\theta$ , et un déplacement  $dz$  selon le vecteur  $\vec{e}_z$ . Ce qui explique les expressions des surfaces élémentaires, ainsi que le volume élémentaire. A titre d'exemple, pour la surface élémentaire de normale  $\vec{e}_z$ , on multiplie les déplacements le long des vecteurs  $\vec{e}_r$  ( $dr$ ) et de  $\vec{e}_\theta$  ( $rd\theta$ ), ce qui donne  $\overrightarrow{d^2S_z} = r dr d\theta \vec{e}_z$ .

## Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont celles qui ont été choisies de très longue date pour se repérer à la surface de la Terre. Les coordonnées sphériques sont paramétrées par  $r \in [0, \infty[$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , appelé aussi colatitude et lié à la latitude  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ , et  $\varphi \in [0, 2\pi[$



Le point  $M$  est repéré tel que:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \quad (35)$$

Considérons  $H$  le projeté orthogonal du point  $M(r, \theta, \varphi)$  sur le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . On note  $\vec{u}$  le vecteur directeur de  $\overrightarrow{OH}$ . On appelle le plan  $(O, \vec{u}, \vec{e}_z)$  **plan de la porte**.

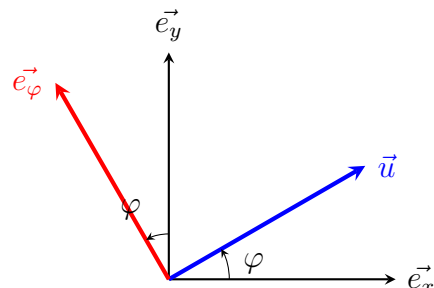
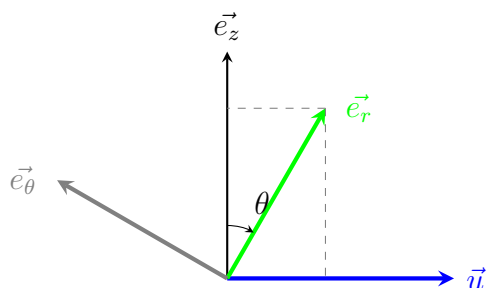


Figure 28: Figure plane du plan  $(O, \vec{u}, \vec{e}_z)$     Figure 29: Figure plane du plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

On a alors :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{e}_z + \sin(\theta)\vec{u} \\ \vec{e}_r &= \cos(\theta)\vec{e}_z + \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\vec{e}_\theta = \sin(\theta)\vec{e}_z - \cos(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) \quad (37)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y \quad (38)$$

On note que  $\vec{e}_r$  est un vecteur tournant. Et nous avons pour l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées sphériques:

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi} \end{cases} \quad (39)$$

$$\vec{a} = \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - \frac{r}{2} \sin(2\theta) \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r\dot{\theta} \cos \theta \dot{\varphi} \end{cases} \quad (40)$$

**Théorème 4.15.** Comme le même vecteur  $\overrightarrow{OM}$  peut être repéré par les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ ,  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r$ , il est intéressant d'indiquer une correspondance entre les deux systèmes de coordonnées.

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad z = r \cos(\theta) \quad (41)$$

**Exercice 4.5.** En vous inspirant du cas des coordonnées cylindriques et de la remarque

4.2, montrez qu'en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{d^2 S_r} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r \quad (42)$$

$$\overrightarrow{d^2 S_\theta} = r \sin(\theta) dr d\varphi \vec{e}_\theta \quad (43)$$

$$\overrightarrow{d^2 S_\varphi} = r dr d\theta \vec{e}_\varphi \quad (44)$$

$$dV = r \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \quad (45)$$

## Les coniques

**Définition 4.5.** Une conique est une section plane d'un cône. [Voir Figure 30]. On appelle conique de **directrice**  $(\Delta)$ , de **foyer**  $F$ , et d'**excentricité**  $e > 0$  l'ensemble  $\mathcal{C} = \{M/d(M, F) = e \times d(M, (\Delta))\}$

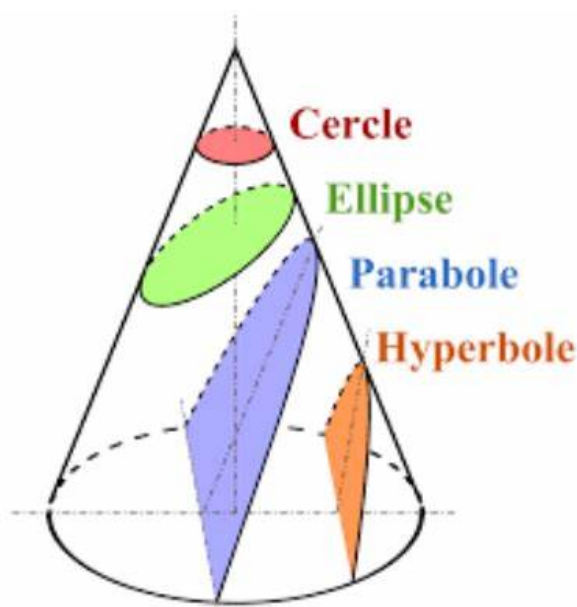


Figure 30: Toute conique est une section plane d'un cône.

## Équation d'une conique

Dans un repère quelconque, en coordonnées cartésiennes, l'équation d'une conique est l'ensemble des points  $M(x, y)$  sachant que  $A, B, C, D, E, F$  sont des constantes, avec  $|A| + |B| + |C| \neq 0$  :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (46)$$

On cherchera à éliminer le terme en  $xy$  si  $B \neq 0$ , on effectuera un changement de coordonnées par rotation d'angle  $\theta$ .

$$X = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \quad (47)$$

$$Y = -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y \quad (48)$$

Ainsi, on a:

$$x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \quad (49)$$

$$y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \quad (50)$$

L'équation 46 devient après le changement de coordonnées :

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0 \quad (51)$$

avec:

$$\begin{cases} A' = A \cos^2(\theta) + 2B \cos(\theta) \sin(\theta) + C \sin^2(\theta) \\ B' = B \cos(2\theta) + (C - A) \sin(2\theta) \\ C' = A \sin^2(\theta) - 2B \sin(\theta) \cos(\theta) + C \cos^2(\theta) \\ D' = D \cos(\theta) + E \sin(\theta) \\ E' = E \cos(\theta) - D \sin(\theta) \\ F' = F \end{cases} \quad (52)$$

Si  $A - C \neq 0$ , on choisit  $\theta$  tel que  $\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$ , on arrive à annuler  $B' = 0$ , sinon si  $a = c$ , on choisit  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . On appelle **discriminant de la conique**, le nombre  $\Delta = B^2 - AC$ .

**Exercice 4.6.** Dans cet exercice:

1. Vérifier les calculs 52.
2. Montrer que  $A'C' = -\Delta$ .

Dans le nouveau repère, l'équation de la courbe devient :

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0 \quad (53)$$

- Si  $\Delta \neq 0$ , on identifie le début de deux identités remarquables, on complète le carré alors :

$$\begin{cases} A'X^2 + D'X = \left(A'X + \frac{D'}{2A'}\right)^2 - \frac{D'^2}{4A'^2} \\ C'Y^2 + E'Y = \left(C'Y + \frac{E'}{2C'}\right)^2 - \frac{E'^2}{4C'^2} \end{cases} \quad (54)$$

On effectue un nouveau changement de repère par translation :

$$X' = A'X + \frac{D'}{2A'} \quad (55)$$

$$Y' = C'Y + \frac{E'}{2C'} \quad (56)$$

L'équation de la conique devient dans ce nouveau repère :

$$A'X'^2 + C'Y'^2 = \frac{D'^2}{4A'^2} + \frac{E'^2}{4C'^2} - F' \quad (57)$$

- Si  $\Delta = 0$ , sans perte de généralité, on choisit  $A' = 0$ , et on effectue le changement de repère par translation (en supposant  $D' \neq 0$ ) :

$$X' = X - \frac{E'^2}{4D'C'^2} + \frac{F'}{D'} \quad (58)$$

$$Y' = C'X + \frac{E'}{2C'} \quad (59)$$

### Équation réduite et types des coniques

- Si  $\Delta < 0$ , la conique est une **ellipse**, et l'équation réduite de la conique dans un repère adapté est :  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ . Si  $a = b$ , on retrouve l'équation du **cercle**.
- Si  $\Delta > 0$ , la conique est une **hyperbole**, et l'équation réduite de la conique est  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ .
- Si  $\Delta = 0$ , la conique est une **parabole**, et l'équation réduite est :  $Y = 2pX$ .

**Théorème 4.16.** L'équation d'une conique de **directrice**  $(\Delta)$ , de **foyer**  $F$ , et d'**excentricité**  $e$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (60)$$

où  $p = ed(F, (\Delta))$ , et  $\theta_0 = (\vec{e}_x, \vec{FP})$  où  $P$  est le projeté orthogonal du point  $F$  sur la directrice  $(\Delta)$ . Notons que  $d(F, (\Delta)) = FP$ .

**Théorème 4.17.** Soit  $\mathcal{C} = \{d(M, F) = e \times d(M, (\Delta))\}$  une conique, son type est déterminé par la valeur de l'excentricité  $e$ :

- Si  $0 \leq e < 1$ , la conique est une ellipse. Le cas  $e = 0$  correspond au cercle.
- Si  $e > 1$ , la conique est une hyperbole.
- Si  $e = 1$ , la conique est une parabole.

On présente le lien entre les différents paramètres de l'équation réduite de la conique, on pose  $d = d(F, (\Delta))$ :

$$p = ed \quad (61)$$

$$a = \frac{p}{|1 - e^2|} \quad (62)$$

$$b = \sqrt{|1 - e^2|}a \quad (63)$$

### Ellipse

**Définition 4.6.** Soit  $\mathcal{C}$ , une ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ , de directrices  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ , et d'excentricité  $0 < e < 1$ , et d'équation réduite  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . La définition bifocale de l'ellipse est :

$$MF + MF' = 2a \quad (64)$$

On appelle  $a$  demi-grand axe, et appelle  $b$  demi petit-axe.

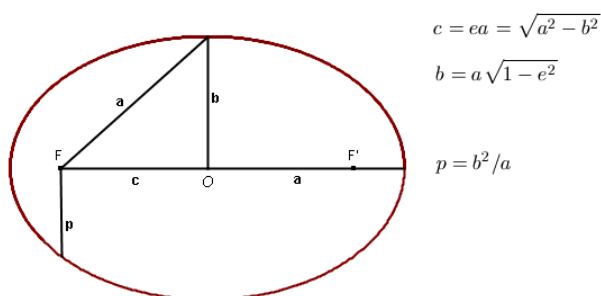


Figure 31: Ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ , et de demi grand-axe  $a$ , et demi petit-axe  $b$ .

**Exercice 4.7.** Pour  $\mathcal{C}$  une ellipse de foyers  $F(-c, 0)$  et  $F'(c, 0)$  et de centre  $O$  comme dans la figure 31, trouver l'équation de directrices de l'ellipse  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ .

**Définition 4.7.** On appelle **affinité orthogonale** d'axe  $(D)$  et de rapport  $k \in \mathbb{R}^*$ , l'application affine qui à tout point  $M$  fait correspondre le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ , où  $O$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(D)$ .

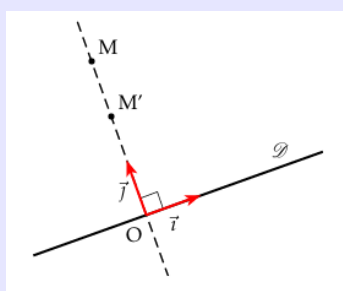


Figure 32: Affinité orthogonale d'axe  $(D)$  et de rapport  $0 < k < 1$ .

**Théorème 4.18.** Soit une ellipse  $\mathcal{C}$  de centre  $O$ , de demi grand-axe  $a$ , et de demi petit-axe  $b$ .

1.  $\mathcal{C}$  est l'image du cercle de centre  $O$ , et de rayon  $b$ , par l'affinité orthogonale d'axe  $(Ox)$  et de rapport  $\frac{b}{a}$ .

2. L'équation de la tangente de l'ellipse au point  $M(x_0, y_0)$  est :  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ .

3. Pour tout point  $M$  de l'ellipse, la bissectrice de  $F\hat{M}F'$  est perpendiculaire à la tangente de l'ellipse en  $M$ .

**Exercice 4.8.** A partir du point 2 de la proposition 4.18, retrouvez le résultat qui implique que la tangente du cercle de centre  $O$  en un point  $M$  est perpendiculaire à la droite  $(OM)$ .

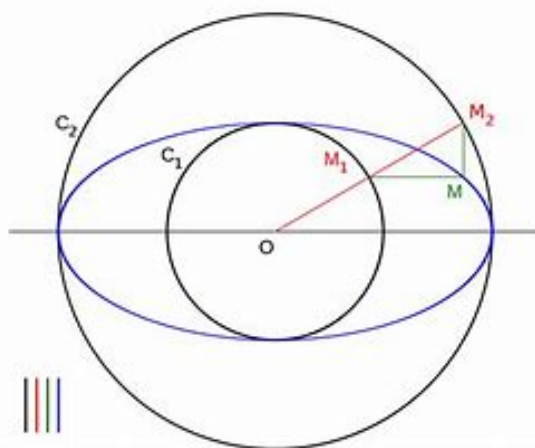


Figure 33: L'ellipse est l'image de  $C_1$  par affinité  $\frac{b}{a}$  et l'image de  $C_2$  par affinité de paramètre  $\frac{a}{b}$ .

La propriété 3 de la proposition 4.18 est appelée en physique « propriété de réflexivité ». En optique géométrique dans les miroirs elliptiques : un rayon lumineux qui passe par un des foyers, lorsqu'il est réfléchi, passe par l'autre foyer. Ainsi, si l'on met une ampoule à un foyer d'un miroir elliptique, le faisceau lumineux se concentre sur l'autre foyer. On la retrouve aussi en acoustique, dans une pièce de forme elliptique, une personne placée au foyer  $F'$  peut entendre aisément ce que murmure une personne placée à  $F$ . Ainsi, la forme elliptique est souvent utilisée pour des raisons acoustiques et esthétiques dans des bâtiments comme des théâtres, des salles de concert ou même des salles de cinéma.

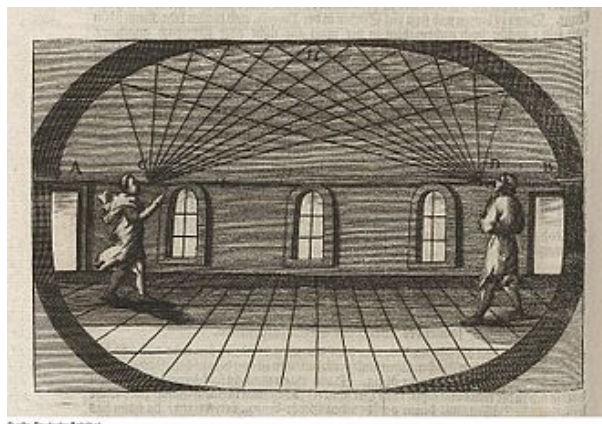


Figure 34: Chambre à écho.

## Hyperbole

**Définition 4.8.** Soit  $C$ , une hyperbole de foyers  $F$  et  $F'$ , de sommets  $S$  et  $S'$ , de directrices  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ , et d'excentricité  $e > 1$ , et d'équation réduite  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

- La définition bifocale de l'ellipse est l'ensemble des points  $M$  tel que :

$$|MF - MF'| = 2a \quad (65)$$

- Le cercle  $C(O, \frac{SS'}{2})$  s'appelle le **cercle principal de l'hyperbole**.
- On appelle asymptotes de l'hyperbole les deux droites,  $(D) : y = \frac{b}{a}x$  et  $(D') : y = -\frac{b}{a}x$ .
- Une hyperbole est dite **équilatère** lorsque ses deux asymptotes sont perpendiculaires.

**Exercice 4.9.** Calculer l'excentricité d'une hyperbole équilatère.

**Théorème 4.19.** Soit  $C$  une hyperbole de foyers  $F$  et  $F'$ , de sommets  $S$ ,  $S'$ , et d'excentricité  $e > 1$ , avec pour équation réduite  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

1. La tangente de l'hyperbole au point  $M(x_0, y_0)$  est d'équation :  $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ .
2. Les directrices de l'hyperbole sont d'équations  $(\Delta) : x = \frac{a}{e}$  et  $(\Delta') : x = -\frac{a}{e}$ .
3. L'équation de l'hyperbole ramenée à ses asymptotes est :  $XY = \frac{a^2+b^2}{4}$ .
4. L'hyperbole est l'image de son cercle principal par l'homographie, i.e. une

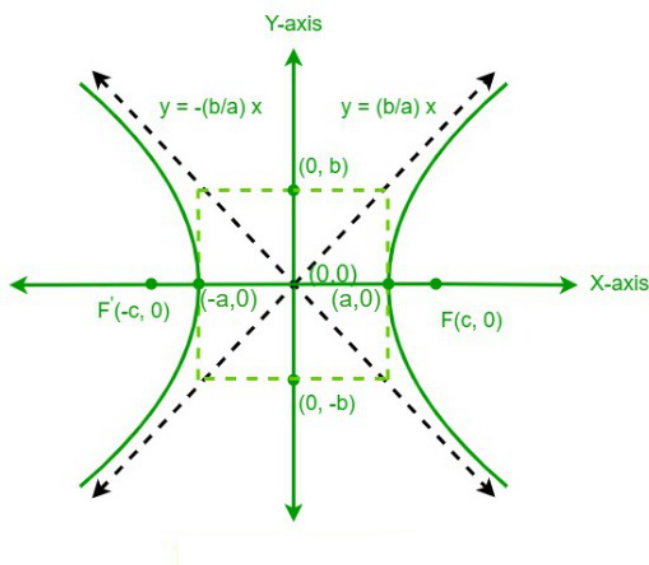


Figure 35: Hyperbole de foyers  $F(c, 0)$  et  $F'(-c, 0)$  où  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , et de sommets  $S(a, 0)$  et  $S'(-a, 0)$ .

transformation tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{a^2}{x} \\ y' = \frac{by}{x} \end{cases} \quad (66)$$

5. La tangente de l'hyperbole en  $M$  est la bissectrice de  $F\hat{M}F'$ .

### Parabole

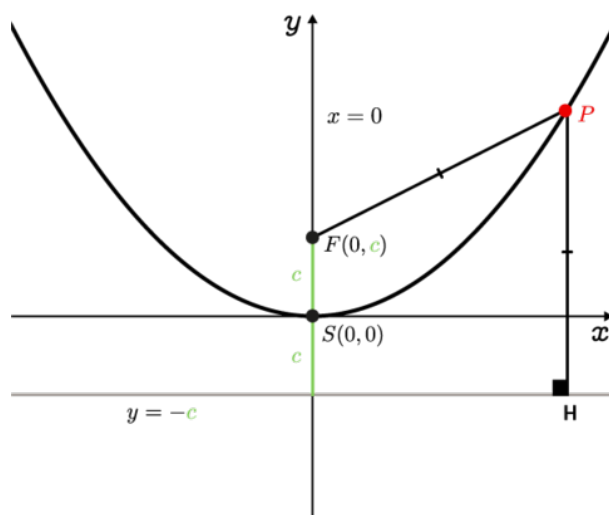
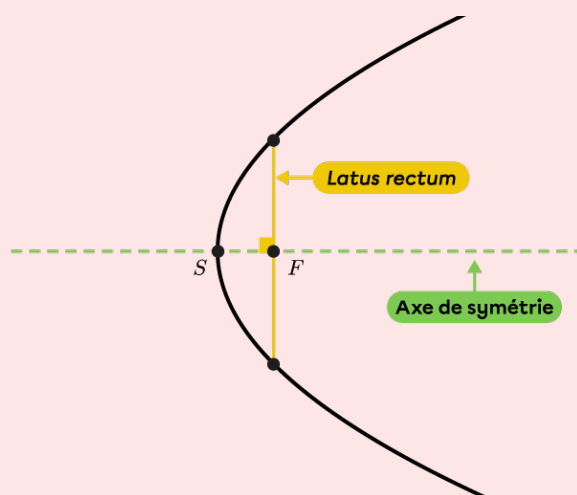


Figure 36: Parabole verticale de foyer  $F$  et de directrice  $(\Delta) : y = -c$ , et d'équation  $y = 4cx^2$ .

**Théorème 4.20.** Soit  $\mathcal{C}$  une parabole de foyer  $F$ , de sommet  $S$ , et d'excentricité  $e = 1$ , avec pour équation réduite  $x^2 = 4cy = 2py$ .

1. La parabole est le lieu géométrique des centres des cercles passant par  $F$  et tangents à la directrice  $(\Delta)$ .
2. La tangente de la parabole en  $P(x_0, y_0)$  est la médiatrice de  $[FH]$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $P$  sur la directrice  $(\Delta)$ . Elle est aussi la bissectrice intérieure de  $\widehat{FMH}$ . Et elle a pour équation  $yy_0 = p(x + x_0)$ .
3. Deux tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires se coupent sur la directrice.

**Exercice 4.10.** On appelle **latus rectum** un segment de droite qui passe par le foyer de la parabole et qui est perpendiculaire à son axe de symétrie.



Montrez que la longueur du latus rectum est de  $4c$ .

## Coniques en physique

**Exercice 4.11.** On considère un objet  $M$  soumis à une force centrale  $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ .

**Question -1** Quel est le système de coordonnées adapté au problème ?

**Question -2** On considère le mouvement plan dans  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , montrez que :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{K}{r^2} \quad (67)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (68)$$

**Question -3** Montrez que  $r^2\dot{\theta} = C$  où  $C$  est une constante d'intégration.

**Question -4** Montrez que la coordonnée radiale  $r$  vérifie l'équation différentielle

suivante :

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} - \frac{K}{r^2} = 0 \quad (69)$$

**Question -5** Montrez que  $r = \frac{p}{1+e \cos(\theta)}$  est une solution, montrez que  $p = \frac{C^2}{K}$ .

On dit que les forces centrales dérivent d'une énergie potentielle car  $\vec{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{e}_r$ , où  $\mathcal{E}_p$  est l'énergie potentielle du système.

**Question -6** Exprimer l'énergie mécanique du système  $\mathcal{E}$ , en fonction de  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $K$  et  $r$ .

**Question -7** Montrez que  $e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}C^2}{K^2}}$

**Question -8** Donnez des exemples de forces centrales.

On a vu alors que la solution d'un problème de forces centrales est une conique. Ainsi, quand  $e < 1$ , c'est à dire une ellipse, on retrouve l'orbite **des planètes autour du Soleil**. Et si  $e = 1$ , alors l'énergie du système  $\mathcal{E} = 0$ , c'est une parabole. Un objet sur une telle trajectoire est sur le point de s'échapper de l'influence gravitationnelle, mais avec une énergie juste suffisante pour ne pas être retenu par le corps central, c'est le cas **des comètes**. Et dernièrement, quand  $e > 1$ , on a plus que suffisamment d'énergie pour échapper à l'attraction gravitationnelle du corps central, c'est le cas **des sondes spatiales**.

## Formules classiques des aires et volumes

### Intégrales multiples

Soit  $I, J, K$  des intervalles bornés de  $\mathbb{R}$ . Soit  $a, b \in I, c, d \in J, u, v \in K$ . On considère une fonction  $f(x, y, z)$  à trois variables définie et continue sur  $I \times J \times K$ , et on se propose de calculer l'intégrale  $A = \int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$ . Alors, on commence un à un par intégrer d'abord selon  $dx$ , en considérant  $y$  et  $z$  constantes. Soit  $F_1(y, z)$  la primitive selon  $x$  qui dépend de  $y$  et  $z$ , l'expression devient  $A = \int_u^v \int_c^d F_1(y, z) dy dz$ . On intègre par rapport à  $y$ , on retrouve une fonction  $F_2(z)$  qui ne dépend que de  $z$ ,  $A = \int_u^v F_2(z) dz$ . Il importe de noter que l'ordre d'intégration n'est pas important (car les intervalles bornés), on choisit en premier donc la variable la plus facile à intégrer.

Si à la place, on a  $f(x, y)$  dépendant de deux variables, on parle d'intégrales doubles. Les surfaces sont calculées en intégrant sur les surfaces élémentaires définies dans la partie des coordonnées (des intégrales doubles). Et les volumes sont calculés en intégrant sur les volumes élémentaires (des intégrales triples).

**Note 4.3.** Pour mieux comprendre l'utilité des intégrales doubles pour le calcul des surfaces, on présentera le cas de la surface d'un disque de rayon  $R$  que l'on connaît déjà  $S = \pi R^2$ .

La surface élémentaire du disque correspond à la surface élémentaire de normale  $\vec{e}_z$ , où  $d^2 S_z = r dr d\theta \vec{e}_z$  (voir proposition 4.14). On a pour un disque de rayon  $R$ , la

coordonnée  $r$  dans l'intervalle  $[0, R]$ , et l'angle  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^R \int_0^{2\pi} d^2S_z \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta \end{aligned}$$

On va commencer d'abord par intégrer selon  $d\theta$ , sachant que  $r$  est une variable indépendante qui ne dépend pas de  $\theta$ . On a alors,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^R r dr [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \int_0^R r dr 2\pi \\ &= \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R 2\pi \\ &= \pi R^2 \end{aligned} \tag{70}$$

De l'autre côté on peut voir que si on commence par intégrer selon  $dr$  puis selon  $d\theta$ , on retrouvera même résultat.

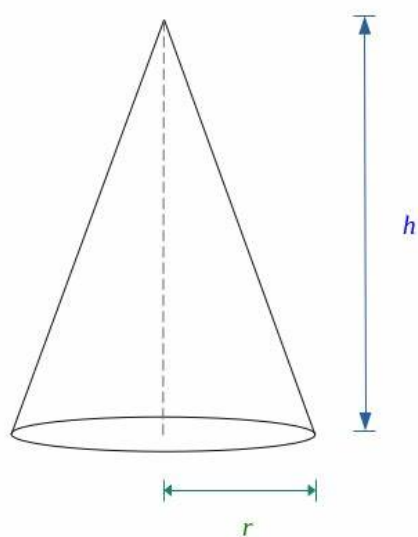
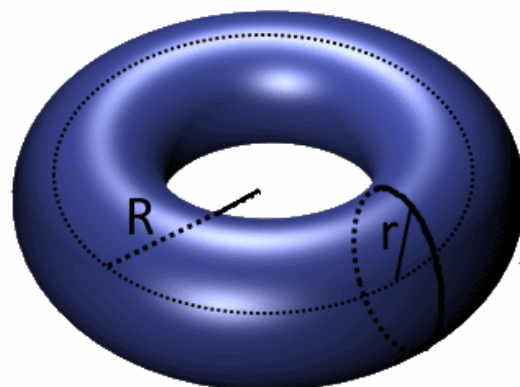
**Exercice 4.12.** Calculez le volume d'une sphère de rayon  $R$ , et sa surface intérieure (la surface de normale  $\vec{e}_r$ ).

### Aires et volumes

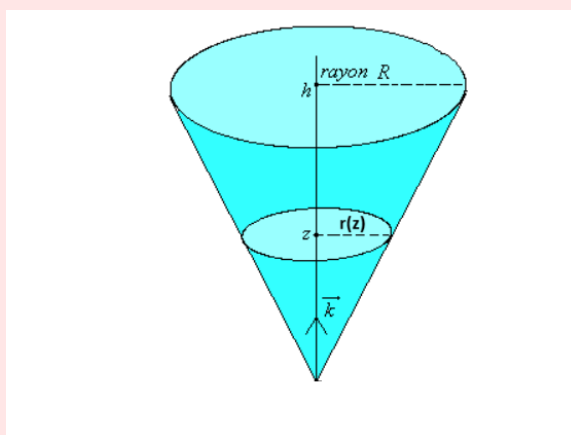
On présente ci-dessous une liste non exhaustive de surfaces et volumes des figures géométriques classique.

Figure géométrique	Aire/Surface	Volume
Carré (côté $a$ )	$a^2$	–
Rectangle (longueur $L$ , largeur $l$ )	$L \times l$	–
Triangle (base $b$ , hauteur $h$ )	$\frac{b \times h}{2}$	–
Disque (rayon $r$ )	$\pi r^2$	–
Sphère (rayon $r$ )	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Cylindre (rayon $r$ , hauteur $h$ )	$2\pi r h + 2\pi r^2$	$\pi r^2 h$
Cône (rayon $r$ , hauteur $h$ )	$\pi r \sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Parallélépipède rectangle (dimensions $L \times l \times h$ )	$2(Ll + Lh + lh)$	$L \times l \times h$
Pyramide (base $B$ , hauteur $h$ )	$B + (\text{aire latérale})$	$\frac{1}{3}Bh$
Tore (rayon majeur $R$ , rayon mineur $r$ )	$4\pi^2 Rr$	$2\pi^2 Rr^2$

Table 3: Surfaces et volumes des figures géométriques usuelles

(a) Cône de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ .(b) Tore de rayon mineur  $r$ , et de rayon majeur  $R$ .

**Exercice 4.13.** On considère un cône de rayon de base  $R$ , et de hauteur  $h$ , et on se propose de calculer son volume.



**Question -1** On considère  $r(z)$ , le rayon de la section circulaire du cône (la surface parallèle à la base du pyramide) à la hauteur  $z$ , montrez que  $r(z) = \frac{Rz}{h}$ .

**Question -2** Trouvez l'aire  $A(z)$  d'un cercle de rayon  $r(z)$ .

**Question -3** Retrouvez le volume du cône en intégrant sur son volume élémentaire  $dV = A(z)dz$ .

## 5 Equations différentielles

### 5.1 Introduction aux Équations Différentielles

#### Définitions

**Définition 5.1.** Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. En physique, elles décrivent des phénomènes dynamiques tels que le mouvement des particules, les circuits électriques ou encore les systèmes thermodynamiques. Une équation différentielle d'ordre  $n$  s'écrit donc sous la forme générale :

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0 \quad (71)$$

Si l'équation est linéaire à coefficients constants, elle prend la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = f(t) \quad (72)$$

**Note 5.1.** On se limitera dans la suite aux équations linéaires.

**Définition 5.2.** Une équation différentielle homogène est une équation dont le second membre  $f(t)$  est nul.

#### Solutions générales et particulières

**Définition 5.3** (Solution générale). Elle contient l'ensemble des solutions possibles de l'équation différentielle. Elle dépend de constantes arbitraires, qui apparaissent en raison du processus d'intégration.

**Définition 5.4** (Solution particulière). Elle est obtenue en imposant des conditions initiales ou aux limites spécifiques. Cela permet de déterminer les constantes arbitraires présentes dans la solution générale.

#### Exemple

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt} = C \quad (73)$$

avec  $C$  une constante réelle. Une solution générale de cette équation est :

$$y(t) = Cx + D \quad (74)$$

avec  $D$  une constante d'intégration arbitraire.

Supposant maintenant que  $y$  s'annule à  $t = 0$ , alors on trouvera  $D = 0$ . Donc la solution particulière dans cette situation est :

$$y(t) = Cx \quad (75)$$

## 5.2 Équations linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants

### Équation différentielle d'ordre 1

**Définition 5.5.** Une équation différentielle d'ordre 1 s'écrit sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} + ay = f(t) \quad (76)$$

**Théorème 5.1** (Solution de l'équation homogène). Quand  $f(t)=0$ , la solution homogène de l'équation différentielle d'ordre 1 s'écrit :

$$y_h = Ce^{-at} \quad (77)$$

avec  $C$  une constante d'intégration arbitraire.

**Théorème 5.2** (Variation de la constante). La méthode de la variation de constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme :

$$y_p(t) = C(t)e^{-at} \quad (78)$$

où  $C(t)$  est une fonction à déterminer. En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$C'(t)e^{-at} = f(t) \quad (79)$$

Ce qui donne après intégration :

$$C(t) = \int f(t)e^{at} dt \quad (80)$$

La solution générale est donc :

$$y = y_h + y_p = Ce^{-at} + \left( \int f(t)e^{at}, dt \right) e^{-at} \quad (81)$$

**Exercice 5.1.** Un système mécanique avec un amortisseur est modélisé par l'équation suivante :

$$m \frac{dv}{dt} + \gamma v = F(t) \quad (82)$$

où  $m$  la masse,  $\gamma$  le coefficient d'amortissement,  $v$  la vitesse et  $F(t)$  la force appliquée. Résoudre cette équation pour  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  en utilisant la méthode de variation

de la constante.

## Équation différentielle d'ordre 2

**Définition 5.6.** Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t) \quad (83)$$

où  $b$  et  $c$  sont des constantes réelles et  $f(t)$  est une fonction donnée.

**Théorème 5.3.** La solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y = y_h + y_p \quad (84)$$

- **Solution de l'équation homogène**  $y_h$  : On pose  $f(t) = 0$  et on résout l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + br + c = 0 \quad (85)$$

qui admet trois types de solutions selon la nature des racines :

- Racines réelles distinctes :  $y_h = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$
  - Racines réelles égales :  $y_h = (C_1 + C_2t)e^{rt}$
  - Racines complexes  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  :  $y_h = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$
- **Solution particulière**  $y_p$  : Déterminée en fonction de  $f(t)$  à l'aide de la méthode de variation de la constante présentée dans le théorème suivant.

**Théorème 5.4** (Méthode de variation de la constante). Pour trouver une solution particulière  $y_p$ , on applique la méthode de variation de la constante :

$$y_p = u_1(t)e^{r_1t} + u_2(t)e^{r_2t}, \quad (86)$$

où  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont des fonctions à déterminer.

En imposant la condition d'annulation suivante :

$$u_1'(t)e^{r_1t} + u_2'(t)e^{r_2t} = 0, \quad (87)$$

et en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient le système :

$$u_1'r_1e^{r_1t} + u_2'r_2e^{r_2t} = f(t). \quad (88)$$

La résolution de ce système donne :

$$u_1'(t) = \frac{-r_2 f(t) e^{r_2 t}}{(r_1 - r_2) e^{(r_1 + r_2)t}}, \quad u_2'(t) = \frac{r_1 f(t) e^{r_1 t}}{(r_1 - r_2) e^{(r_1 + r_2)t}}. \quad (89)$$

En intégrant, on obtient :

$$u_1(t) = \int u_1'(t) dt, \quad u_2(t) = \int u_2'(t) dt. \quad (90)$$

La solution particulière est alors :

$$y_p = u_1(t) e^{r_1 t} + u_2(t) e^{r_2 t}. \quad (91)$$

**Exercice 5.2.** Un oscillateur amorti de masse  $m$ , soumis à une force de frottement proportionnelle à la vitesse et à une force de rappel, vérifie l'équation :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (92)$$

1. Déterminer les conditions sur  $\gamma$  pour lesquelles le mouvement est apériodique, critique ou périodique.
2. Résoudre l'équation pour  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = v_0$ .

### 5.3 Système différentiel

**Exercice 5.3.** Considérons deux masses  $m_1$  et  $m_2$  attachées à des ressorts de constantes  $k_1$  et  $k_2$ , qui peuvent osciller horizontalement. Montrez que les équations différentielles régissant ce système s'écrivent sous la forme :

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \quad (93)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 \quad (94)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)}{m_1} \quad (95)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{-k_2 (x_2 - x_1)}{m_2} \quad (96)$$

**Définition 5.7.** Un système différentiel dans le cas linéaire s'écrit sous la forme générale :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A * \mathbf{X}(t) + B * \mathbf{U}(t)$$

où :

$$\bullet \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ est le vecteur des fonctions inconnues.}$$

### Cas spécial d'utilisation du système différentiel

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation différentielle d'ordre 2, comme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0, \quad (97)$$

on est souvent bloqué par le fait qu'elle dépend à la fois de  $y$  et de sa dérivée  $\frac{dy}{dt}$ . On va donc transformer cette équation d'ordre 2 en un système de deux équations d'ordre 1.

On pose :

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{dy}{dt}. \quad (98)$$

L'équation devient alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (99)$$

On a donc un système d'équations différentielles linéaires. Beaucoup plus simple à gérer qu'une équation d'ordre 2 !

**Note 5.2.** Lorsqu'on dispose de  $n$  équations différentielles, il est courant de les reformuler sous forme matricielle afin de faciliter leur résolution.

**Note 5.3.** Afin de pouvoir résoudre ce système différentiel écrit sous forme matricielle, on doit introduire la notion de l'exponentielle de matrice.

## 5.4 Exponentielle de matrice

**Définition 5.8.** L'exponentielle de matrice est une généralisation de la fonction exponentielle aux matrices carrées. Elle est définie par la série de Taylor suivante :

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

où  $A$  est une matrice carrée,  $I$  est la matrice identité de même taille que  $A$ , et les puissances de  $A$  sont prises dans le sens matriciel. Cette série converge toujours pour toute matrice  $A$ .

**Note 5.4.** L'exponentielle de matrice  $e^{At}$ , où  $t$  est un scalaire, est définie de manière similaire, mais avec  $t$  dans chaque terme de la série :

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Elle joue un rôle central dans la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires, où elle permet de représenter la solution d'un système dynamique linéaire sous forme exponentielle, notamment pour des systèmes dont la matrice de coefficients est constante.

**Exercice 5.4.** Soit la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer l'exponentielle de la matrice  $e^{At}$ , où  $t$  est un scalaire.

## 5.5 Résolution d'un système différentiel

**Théorème 5.5** (Résolution d'un système d'équations différentielles par l'exponentielle de matrice). Soit le système suivant :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A * \mathbf{X}(t)$$

La solution de ce système s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{X}(t) = e^{At}\mathbf{X}(0)$$

où  $e^{At}$  est l'exponentielle de la matrice  $A$ , et  $\mathbf{X}(0)$  est le vecteur des conditions initiales.

Cette méthode permet de résoudre le système d'équations différentielles linéaires et de déterminer la solution  $\mathbf{X}(t)$  en fonction du temps  $t$ .

**Note 5.5** (Méthode de variation de la constante). Soit le système différentiel suivant :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

La solution de l'équation homogène s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{At}$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, on pose :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)e^{At}$$

On trouve donc :

$$e^{At} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = B\mathbf{u}(t)$$

En intégrant cette équation, on obtient la solution pour  $\mathbf{v}(t)$  :

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t e^{-A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Ainsi, la solution particulière du système est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{v}(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

**Exercice 5.5** (Électromagnétisme). Considérons un circuit RLC série composé d'un condensateur  $C$ , d'une inductance  $L$ , et d'une résistance  $R$ , connectés en série. Une tension  $u(t)$  est appliquée au circuit, et la charge du condensateur est notée  $q(t)$ . L'objectif est de modéliser ce système à l'aide d'un système d'équations différentielles, puis de résoudre ce système en utilisant l'exponentielle de matrice.

1. **Équation du circuit RLC** : À partir des lois de Kirchhoff, dérivez pour trouver l'équation différentielle régissant le système.
2. **Transformation en système différentiel** : Reformulez l'équation sous la forme d'un système différentiel, en spécifiant le vecteur d'état  $\mathbf{x}(t)$ .
3. **Solution du système homogène** : Résolvez le système homogène associé ( $u(t) = 0$ ) en utilisant l'exponentielle de matrice.
4. **Résolution du système non homogène** : Déterminez la solution générale du système différentiel.

## 5.6 Exercices

**Exercice 5.6** (Mécanique Classique). Considérez un oscillateur harmonique simple composé d'un ressort de constante  $k$  et d'une masse  $m$ , soumis à une force de rappel  $F = -kx$ . L'équation du mouvement est donnée par l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

où  $x(t)$  est le déplacement de la masse à un instant  $t$ .

1. **Équation du mouvement** : Déterminez l'équation du mouvement pour le système décrit ci-dessus.
2. **Solution de l'équation** : Résolvez l'équation différentielle en utilisant la méthode des solutions caractéristiques.

3. **Oscillation et fréquence** : Trouvez la période et la fréquence de l'oscillation.

**Exercice 5.7** (Thermodynamique). La loi de refroidissement de Newton décrit la variation de la température d'un objet en fonction du temps. L'équation différentielle associée est donnée par :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{env})$$

où  $T(t)$  est la température de l'objet,  $T_{env}$  est la température ambiante, et  $k$  est une constante positive.

1. **Résolution de l'équation** : Résolvez l'équation différentielle pour  $T(t)$ , en utilisant les conditions initiales  $T(0) = T_0$ .
2. **Température à long terme** : Quelle est la température de l'objet à l'équilibre (lorsque  $t \rightarrow \infty$ ) ?
3. **Interprétation** : Interprétez physiquement le rôle de la constante  $k$  et de la température ambiante  $T_{env}$ .

**Exercice 5.8** (Électromagnétisme). Un circuit RLC série est alimenté par une source de tension sinusoïdale  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ . L'équation du circuit est donnée par :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = U_0 \sin(\omega t)$$

où  $q(t)$  est la charge sur le condensateur,  $L$  est l'inductance,  $R$  est la résistance, et  $C$  est la capacité du condensateur.

1. **Transformation en système différentiel** : Transformez cette équation en un système différentiel d'ordre 1 en introduisant un vecteur d'état  $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \frac{dq}{dt} \end{pmatrix}$ .
2. **Solution du système** : Résolvez le système différentiel en utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice.
3. **Réponse du système** : Trouvez la réponse du circuit en régime permanent (après un long temps, lorsque  $t \rightarrow \infty$ ).
4. **Facteur de qualité** : Déterminez le facteur de qualité du circuit et discutez de son influence sur la résonance.

## 6 Probabilités

### 6.1 Espace probabilisé

Les probabilités nous permettent de modéliser une expérience aléatoire, c'est-à-dire un phénomène dont l'issue ne peut être prédite avec certitude et dont le résultat est déterminé par le hasard.

L'ensemble des résultats possibles s'appelle l'ensemble fondamental (ou référentiel, univers des possibles) et sera noté  $\Omega$ .

Un événement est un ensemble de résultats (un sous-ensemble de l'univers) d'une expérience aléatoire.

On exige que la collection  $\mathcal{C}$  des événements dispose de la structure d'une algèbre de Boole:

1.  $\Omega \in \mathcal{C}$  ;  $\emptyset \in \mathcal{C}$ .
2. Si  $A \in \mathcal{C}$ , alors son complémentaire  $A^c \in \mathcal{C}$ .
3. Si  $A, B \in \mathcal{C}$ , alors  $A \cup B \in \mathcal{C}$  et  $A \cap B \in \mathcal{C}$ .

On peut préciser le calcul de la probabilité d'un événement  $E$ . De manière simplifiée, la probabilité théorique vaut :

$$P(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}.$$

**Note 6.1.** *Considérons une particule pouvant se déplacer dans un plan selon quatre directions : gauche, droite, bas et haut. L'ensemble des résultats possibles est alors :*

$$\Omega = \{\text{gauche, droite, bas, haut}\}.$$

**Définition 6.1.** *Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent se réaliser simultanément, c'est-à-dire lorsque leur intersection est vide :*

$$A \cap B = \emptyset.$$

### Formalisme de Kolmogorov

A chaque événement, on associe un nombre positif compris entre 0 et 1, sa probabilité. La théorie moderne des probabilités repose sur l'axiomatique suivante :

**Définition 6.2.** *On appelle **probabilité** sur  $(\Omega, \mathcal{C})$  (où  $\Omega$  est l'ensemble des événements et  $\mathcal{C}$  une classe de parties de  $\Omega$ ), ou **loi de probabilité**, une application  $P$  de  $\mathcal{C}$  dans  $[0, 1]$  telle que :*

1. Pour tout événement  $E$ , on a :

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

2. La probabilité de l'ensemble fondamental est égale à 1 :

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , on a la propriété de  $\sigma$ -additivité :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

**Définition 6.3.** On appelle **espace probabilisé** le triplé  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  où :

- $\Omega$  est l'ensemble fondamental,
- $\mathcal{C}$  est une collection de sous-ensembles de  $\Omega$  (appelée collection des événements), qui possède la structure d'une  $\sigma$ -algèbre de Boole ( citée au début du paragraphe).
- $P : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  est une probabilité sur  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 6.1.** Montrer les propositions suivantes:

1.  $P(\emptyset) = 0$
2.  $P(A^c) = 1 - P(A)$
3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4.  $P(A) \leq P(B)$  si  $A \subset B$  (inégalité de Boole)
5.  $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$  (Il n'y a stricte égalité que si les événements  $A_i$  sont deux à deux incompatibles.)

**Définition 6.4.** Soit  $E$  un ensemble. Une partition de  $E$  est une famille  $\{A_i\}_{i \in I}$  de sous-ensembles de  $E$  telle que :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$  (les parties ne sont pas vides),
- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$  (leur réunion est égale à  $E$ ),
- $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$  (elles sont disjointes deux à deux).

**Note 6.2.** *Considérons un système avec deux états ( particule qui bouge soit vers la droite soit vers la gauche) :  $E = \{D, G\}$ . Une partition possible est :  $A_1 = \{D\}$  et  $A_2 = \{G\}$ . Ces deux ensembles sont disjoints et leur réunion couvre  $E$ .*

**Théorème 6.1.** *Soit  $\Omega = \cup B_i$  un système complet d'événements (i.e. tel que les  $\{B_i\}$  constituent une partition de  $\Omega$ ). Alors, pour tout événement  $A$  :*

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i).$$

## 6.2 Probabilité conditionnelle

On considère la réalisation de deux événements  $A$  et  $B$ . Que peut-on déduire sur la probabilité de l'événement  $B$  sachant que l'événement  $A$  est réalisé ?

Cette probabilité est appelée **probabilité conditionnelle** de  $A$  sachant  $B$  et se note  $P(A|B)$  ou  $P_B(A)$ .

Elle est définie par la relation :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{si } P(B) > 0.$$

**Théorème 6.2.** *Soit  $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$  un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit  $B$  un événement. Alors :*

$$P(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)P(B|A_n).$$

Cette formule permet de calculer la probabilité d'un événement  $B$  en le décomposant suivant un système complet d'événements. En effet,  $B$  est égal à la réunion disjointe des ensembles  $B \cap A_n$ , c'est-à-dire :

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n).$$

Cela justifie l'application de la somme des probabilités.

**Exercice 6.2.** Dans un laboratoire, on utilise deux capteurs pour détecter le passage d'une particule radioactive à travers un tube.

- Le **capteur A** détecte une particule avec une probabilité de 0,9.
- Si le capteur A a détecté la particule, alors le **capteur B** la détecte avec une probabilité de 0,8.
- Si le capteur A **n'a pas détecté** la particule, alors le capteur B la détecte tout de même (par erreur ou hasard) avec une probabilité de 0,1.

1. Quelle est la probabilité que le capteur B détecte une particule ?
2. Quelle est la probabilité que le capteur A ait détecté la particule sachant que le capteur B l'a détectée ?

### Événements indépendants

Soient deux événements  $A$  et  $B$ . Ils sont **indépendants** si la réalisation de  $A$  n'affecte pas la réalisation de  $B$ , et inversement. On peut alors écrire :

$$P(A|B) = P(A),$$

$$P(B|A) = P(B).$$

On dit encore que  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si la probabilité de réalisation simultanée de ces événements est égale au produit de leurs probabilités individuelles

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Si deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors il en est de même pour les événements complémentaires :

$$P(A|B^c) = P(A), \quad P(A^c|B) = P(A^c), \quad P(A^c|B^c) = P(A^c).$$

**Définition 6.5.** Un ensemble d'événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  est dit **totalement indépendant** si, pour tout sous-ensemble  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Les événements sont **deux à deux indépendants** si, pour tous indices  $i, j$  tels que  $i \neq j$ ,

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j).$$

L'indépendance totale implique toujours l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fautive en général.

### 6.3 Variables aléatoires

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur l'ensemble des éventualités, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

On s'intéressera aux valeurs prises  $x_i$  par une variable aléatoire  $X$ , événement noté  $(X = x_i)$ , et plus particulièrement à la probabilité d'obtenir ces valeurs  $P(X = x_i)$ .

**Définition 6.6.** Une **variable aléatoire** (ou **v.a.**) est une application

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si  $X(\Omega)$  est indexée sur  $\mathbb{Z}$ , on dit que  $X$  est une **variable aléatoire discrète**. Sinon, on dit qu'elle est **continue**.

#### Variable aléatoire discrète

Une **variable aléatoire discrète** prend un nombre **fini ou infini indexée sur  $\mathbb{Z}$**  de valeurs possibles. Elle est souvent associée à des situations où les résultats sont comptables, comme :

- Le nombre de faces obtenues en lançant un dé.
- Le nombre de photon reçu par une photodiode.

La probabilité d'une valeur donnée  $x_i$  est donnée par une **loi de probabilité discrète** :

$$P(X = x_i).$$

La somme de ces probabilités est toujours égale à 1 :

$$\sum_i P(X = x_i) = 1.$$

**Définition 6.7.** Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites **indépendantes** si, pour tous  $i$  et  $j$ , les événements  $\{X = i\}$  et  $\{Y = j\}$  sont indépendants, c'est-à-dire :

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = P(X = i)P(Y = j).$$

#### Variable aléatoire continue

Une **variable aléatoire continue** peut prendre des valeurs réelles. Elle est souvent associée à des phénomènes mesurables, comme :

- La durée de vie d'un composant électronique.
- La vitesse d'un atome dans un gaz .

Comme l'ensemble des valeurs est continu, on ne parle pas de  $P(X = x)$ , mais plutôt d'une **densité de probabilité**  $f(x)$  telle que :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

**Note 6.3.** Pour une **variable aléatoire continue**, la probabilité d'obtenir une valeur exacte  $X = x$  est nulle :

$$P(X = x) = 0.$$

En effet, cette probabilité est donnée par l'intégrale :

$$P(X = x) = \int_x^x f(t) dt = 0.$$

**Définition 6.8.** Soit  $X$  une variable aléatoire. On appelle **fonction de répartition** de  $X$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$ , définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

## 6.4 Espérance et variance de V.A

Dans cette partie, nous allons introduire uniquement les définitions mathématiques de l'espérance et de la variance. Ces deux outils permettent de quantifier des grandeurs physiques ainsi que leurs variations. Nous verrons plus tard, à travers des exemples, comment les appliquer concrètement en physique.

**Définition 6.9.** L'espérance ou moyenne d'une variable aléatoire discrète  $X$  est le réel défini par :

$$E[X] = \sum_k kP(X = k)$$

où la somme porte sur toutes les valeurs  $k$  que peut prendre  $X$ .

**Théorème 6.3.** Pour toute fonction  $g$ , l'espérance de  $g(X)$  est donnée par :

$$E[g(X)] = \sum_k g(k)P(X = k)$$

où la somme est prise sur toutes les valeurs  $k$  que peut prendre  $X$ .

**Définition 6.10.** L'espérance de la variable aléatoire  $X$  est définie par :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

lorsque cette intégrale a un sens.

**Théorème 6.4.** L'espérance d'une fonction  $Y = \varphi(X)$  est donnée par :

$$E[Y] = E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x) dx$$

lorsque cette intégrale est bien définie.

**Définition 6.11.** La variance d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

**Note 6.4.** Retenez bien les propriétés suivantes de l'espérance et la variance

(i) Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

(ii) Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires continues, alors :

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Si, de plus, elles sont indépendantes, on a :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

(iii) La covariance entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est définie par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

(iv) Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires dépendantes, alors :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

En physique, la covariance entre deux grandeurs aléatoires  $X$  et  $Y$  mesure la manière dont elles varient ensemble. Une covariance positive indique que lorsque l'une augmente, l'autre a tendance à augmenter aussi, tandis qu'une covariance négative signifie que l'une augmente pendant que l'autre diminue. Si la covariance est nulle, cela signifie que les deux grandeurs ne présentent aucune relation linéaire.

## 6.5 Lois usuelles

### Loi de bernoulli

Ici, nous nous intéressons à la réalisation ou non d'un événement. Autrement dit, nous étudions des expériences aléatoires qui n'ont que deux issues possibles.

En physique, un exemple classique est celui d'un photon traversant un matériau : soit il est absorbé, soit il est transmis. Un autre exemple est la désintégration radioactive d'un noyau instable : à un instant donné, il peut soit se désintégrer, soit rester intact.

Ces situations sont modélisées par des variables aléatoires  $Y$  de type Bernoulli, qui prennent seulement deux valeurs, généralement notées 0 et 1. Cette variable aléatoire ne prend donc que deux valeurs (0 et 1) et sa loi est donnée par :

$$P(Y = 1) = p, \quad P(Y = 0) = q = 1 - p.$$

**Exercice 6.3.** Un détecteur de particules enregistre chaque particule incidente et signale sa détection par un signal binaire :

- $Y = 1$  si la particule est détectée,
- $Y = 0$  si la particule n'est pas détectée.

On suppose que la probabilité qu'une particule soit détectée est  $p = 0.8$ .

1. Déterminez l'espérance  $E[Y]$  et interprétez-la physiquement.
2. Calculez la variance  $\text{Var}(Y)$ .

### Loi binomiale

Un schéma de Bernoulli est la répétition  $n$  fois de la même épreuve dans les mêmes conditions.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui représente le nombre de succès obtenu lors des  $n$  épreuves d'un schéma de Bernoulli. Alors, on dit que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ , notée  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Cette loi est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq n,$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Autrement dit, une variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p)$  est une somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$  :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

où les  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  :

$$X_i \sim \mathcal{B}(p), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

**Exercice 6.4.** Si  $X$  est une v.a. de loi  $\mathcal{B}(n, p)$ , montrez que l'espérance de  $X$  vaut  $np$  et sa variance  $np(1-p)$ .

Dans un détecteur de particules, chaque particule incidente a une probabilité  $p$  d'être détectée et une probabilité  $1 - p$  de ne pas l'être, en raison des limitations du capteur (efficacité de détection, bruits électroniques, absorption, etc.).

Si on envoie un faisceau de  $n$  particules sur le détecteur, alors le nombre  $X$  de particules détectées suit une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p),$$

Ce modèle est essentiel pour l'analyse des performances des détecteurs en physique expérimentale, en particulier en physique des particules et en astrophysique, où l'on cherche à maximiser le rendement des détecteurs tout en minimisant les erreurs de mesure.

### loi de poisson

Cette loi est une approximation de la loi binomiale lorsque  $np$  est petit et  $n$  est grand (en pratique,  $n \geq 50$  et  $np \leq 10$ ).

Une variable aléatoire  $X$  suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , notée  $\mathcal{P}(\lambda)$ , vérifie:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

L'espérance et la variance de  $X$  sont égales à  $\lambda$  :

$$E[X] = \text{Var}(X) = \lambda.$$

La loi de Poisson est couramment utilisée en physique pour modéliser des phénomènes aléatoires rares se produisant dans un intervalle de temps ou d'espace donné. Elle s'applique particulièrement bien lorsque :

- Les événements sont indépendants les uns des autres.
- L'occurrence de chaque événement est rare mais possible sur une grande période ou surface.
- La probabilité d'un événement est proportionnelle à la durée ou la taille de l'intervalle observé.

**Exercice 6.5.** *Un compteur Geiger est utilisé pour mesurer le nombre de désintégrations nucléaires par seconde provenant d'une source radioactive. On suppose que ce nombre suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 4$  désintégrations par seconde.*

- *Quelle est la probabilité d'observer exactement deux désintégrations en une seconde ?*
- *Quelle est la probabilité qu'au moins une désintégration soit détectée en une seconde ?*

## Loi normale

C'est la loi la plus importante. Son rôle est central dans de nombreux modèles probabilistes et dans toute la physique. Elle possède des propriétés intéressantes qui la rendent agréable à utiliser.

On est souvent confronté en physique statistique à des grandeurs qui résultent d'une somme de variables aléatoires microscopiques. Citons par exemple, l'énergie interne d'un gaz, l'aimantation d'un aimant, le déplacement d'un grain de pollen en suspension.

Considérons :

$$S = \sum_{i=1}^N x_i$$

où les  $x_i$  sont des variables aléatoires.  $S$  est donc aussi une variable aléatoire, pour laquelle on peut définir une loi de probabilité  $P(S)$ , *a priori* nécessaire au calcul des grandeurs moyennes.

Cependant, si les variables sont indépendantes, il suffit de connaître les lois de probabilité des  $x_i$ ,  $P(x_i)$ .

**Définition 6.12.** Soient  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ . Une variable aléatoire  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  si sa densité  $f$  est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

**Exercice 6.6.** Calculez l'espérance et la variance de  $S$  en fonction de  $N$ , espérance et variance de  $x_i$

**Théorème 6.5.** La somme  $S$  de  $N$  variables aléatoires indépendantes de moyenne et variance finies suit une loi de probabilité qui tend, lorsque  $N \rightarrow \infty$ , vers une distribution gaussienne de moyenne  $E[S]$  et de variance  $V[S]$ .

## 6.6 Applications

### Physique statistique: Énergie Moyenne d'une Particule Libre et Théorème d'Équipartition

Nous avons vu en physique statistique que la moyenne de l'énergie cinétique d'un gaz est

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

Nous allons démontrer la formule précédente qui porte en physique statistique le nom du théorème d'équipartition.

**Exercice 6.7.** *Considérons une particule libre en une dimension. La particule peut prendre les énergies suivantes :*

$$E_n = n^2 E_0, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (100)$$

*La probabilité d'être dans le niveau d'énergie  $n$  est proportionnelle à :*

$$P_n = \frac{e^{-\frac{n^2 E_0}{k_B T}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m^2 E_0}{k_B T}}}$$

1. Vérifiez que  $P_n$  est bien normalisé
2. Montrer en utilisant une intégration par partie que  $z = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$
3. Sachant que la somme discrète peut être approximée par une intégrale:  
 $\sum f(n) dn \approx \int f(n) \sum f(n)$ , Montrer que  $\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T$

### Mesure expérimentale : Incertitude de type A

Les incertitudes de type A sont les incertitudes évaluées par des méthodes statistiques sur des mesures répétées. Elles proviennent de fluctuations aléatoires et peuvent être estimées par l'analyse de plusieurs observations d'une même quantité physique.

En physique expérimentale, les signaux mesurés ne sont jamais parfaitement déterministes. Ils sont souvent affectés par du bruit, des erreurs instrumentales et d'autres facteurs aléatoires. Il est donc essentiel d'utiliser un modèle probabiliste pour décrire et analyser ces signaux.

Un signal mesuré peut être décomposé comme suit :

$$S_{\text{mesuré}} = S_{\text{réel}} + \epsilon$$

où :

- $S_{\text{réel}}$  est le signal réel (inconnu mais estimable),
- $\epsilon$  est une variable aléatoire représentant le bruit et les erreurs de mesure de moyenne nulle .

Le rapport signal-bruit est un indicateur important pour évaluer la qualité d'une mesure :

$$\text{SNR} = \frac{S_{\text{réel}}}{S_{\text{bruit}}}$$

si le SNR est petit, la mesure n'est pas bonne et il faudra essayer d'augmenter le SNR expérimentalement soit en diminuant le bruit ou en amplifiant le signal.

Les incertitudes expérimentales sont souvent caractérisées par une variance  $\sigma^2$ . Pour plusieurs mesures  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , on définit la moyenne par :

$$E[S_{\text{mesuré}}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \approx S_{\text{réel}}$$

la variance est comme suit:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_i - E[S])^2$$

L'erreur donc calculée sur le signal est:

$$\Delta S = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$